Esercizi di Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie

Esercizi di Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie

Claudio Mattalia

Luglio 2003

Indice

Prefazione

Questo libro è il risultato dell'esperienza didattica maturata presso la Facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Torino a partire dall'anno accademico 2001-2002, in concomitanza con l'introduzione del nuovo ordinamento didattico (e le relative lauree triennali). Tale innovazione ha reso necessaria una riorganizzazione dei corsi di matematica impartiti in questa Facoltà, con la nascita di un unico corso obbligatorio per i diversi indirizzi, denominato "*Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie*", nel quale sono confluiti (almeno in parte) gli argomenti in precedenza affrontati nei due corsi distinti di *"Matematica Generale"* e *"Matematica Finanziaria"*.

In tale ottica, questo testo si presenta come uno strumento utile (si spera) per affrontare, attraverso esempi ed esercizi, i vari temi oggetto del corso, raccogliendo in un unico volume sia applicazioni di carattere più strettamente "economico" sia applicazioni più marcatamente "finanziarie". Nello stesso tempo, l'inevitabile esigenza di operare una selezione di argomenti (dato il vincolo di ore disponibili per un unico corso) giustifica l'assenza di alcuni temi, pure importanti.

Il libro si compone di due parti (corrispondenti ai due grossi filoni del corso), dedicate rispettivamente alla "Matematica per le Applicazioni Economiche" e alla "Matematica per le Applicazioni Finanziarie". All'interno della prima parte vengono affrontati gli argomenti tradizionali di un corso di matematica generale (con alcune semplificazioni, per i motivi già indicati): dopo un capitolo iniziale dedicato alle disequazioni (utilizzate ampiamente nel resto di questa parte del corso), vengono introdotte le nozioni di base relative alle funzioni, ai limiti, al calcolo differenziale e al calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale, oltre ad alcuni elementi di algebra lineare e di calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili reali. Nella seconda parte sono invece affrontati (nuovamente con alcune semplificazioni e selezioni di temi) gli argomenti più rilevanti di un corso tradizionale di matematica finanziaria: dopo un capitolo dedicato alle nozioni di base del calcolo finanziario, vengono presentati i principali criteri utilizzati per effettuare scelte tra operazioni finanziarie ed una serie di applicazioni di particolare rilievo (in questa seconda parte l'ordine di esposizione degli argomenti e la notazione utilizzata riprendono quelli dei volumi *“Matematica per l’Economia e l’Azienda”* di Peccati–Salsa–Squellati, Casa Editrice Egea, 2001, e *“Matematica in azienda. Calcolo finanziario con applicazioni”* di Castagnoli–Peccati, Casa Editrice Egea, 2002, adottati quali testi di riferimento per il corso). All’interno di ogni capitolo ciascuno degli argomenti affrontati è introdotto attraverso un breve richiamo di carattere teorico (tenendo comunque presente che questo è essenzialmente un eserciziario, e non sostituisce quindi il libro di testo), dopodiché vengono illustrati e risolti una serie di esempi (procedendo in ordine crescente di difficoltà). La presentazione è condotta ad un livello il più possibile semplice e chiaro, con lo scopo essenziale di mettere in evidenza il ragionamento che (al di là dei singoli calcoli) è alla base della risoluzione di un certo problema. Al termine di ogni capitolo, infine, sono raccolti numerosi esercizi da svolgere, la cui soluzione è contenuta nel capitolo conclusivo.

Nella stesura di questo libro ho beneficiato dei commenti e dei suggerimenti dei miei colleghi del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata della Facoltà di Economia dell’Università di Torino, che desidero ringraziare sinceramente e con molta gratitudine. Resta peraltro inteso che gli eventuali errori (spero non troppi...) ancora presenti sono di mia esclusiva responsabilità. Ringrazio anche i numerosi studenti che, nel corso degli ultimi due anni, hanno avuto modo di sperimentare precedenti versioni (sotto forma di manoscritti e dispense) del materiale qui presentato, e che con le loro osservazioni e il loro apprezzamento mi hanno convinto a dare a questo materiale forma di libro, nella speranza che possa costituire un utile strumento di studio. Desidero infine ringraziare l’Editore per i numerosi e preziosi suggerimenti che hanno accompagnato la stesura di questo lavoro.

Torino, luglio 2003 Claudio Mattalia

Parte I

Matematica per le Applicazioni Economiche

Capitolo 1

Disequazioni

1.1. Definizioni

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni contenenti una o più incognite. Nel caso di una sola incognita, in particolare, si ha:

$$A(x) \gtreqless B(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzioni della disequazione sono quei valori dell'incognita che rendono vera la disuguaglianza.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni; valgono a questo proposito i seguenti due principi fondamentali:

1. Aggiungendo o togliendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa quantità (costante o variabile) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità (costante) positiva si ottiene una disequazione equivalente a quella data, moltiplicandoli o dividendoli per una stessa quantità (costante) negativa si ottiene una disequazione equivalente a quella data rovesciando il verso della disuguaglianza:

$$A(x) > B(x) \Rightarrow \begin{cases} c \cdot A(x) > c \cdot B(x) & \text{se} \quad c > 0 \\ c \cdot A(x) < c \cdot B(x) & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

Questi due principi vengono utilizzati per risolvere una disequazione, trasformando la disequazione iniziale in una più semplice, ad essa equivalente.

Esempio 1.1 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 5 \geq 0$$

Aggiungendo la quantità (costante) $+5$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$x - 5 + 5 \geq 0 + 5$$

cioè:

$$x \geq 5$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.2 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 3 > x$$

Aggiungendo la quantità (variabile) $-x$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$2x + 3 - x > x - x$$

cioè:

$$x + 3 > 0$$

e poi aggiungendo la quantità (costante) -3 ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando ancora il 1° principio di equivalenza):

$$x + 3 - 3 > 0 - 3$$

cioè:

$$x > -3$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.3 *Risolvere la disequazione:*

$$4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e positiva) $\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza):

$$\frac{1}{4} \cdot 4x > \frac{1}{4} \cdot 5$$

cioè:

$$x > \frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.4 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e negativa) $-\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza e rovesciando la disuguaglianza):

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4x) < \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 5$$

cioè:

$$x < -\frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

In pratica, i due principi di equivalenza illustrati si applicano osservando che è possibile spostare un termine da un membro all'altro della disequazione a condizione di cambiarne il segno (1° principio) e che è possibile moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per una stessa quantità, tenendo presente che il verso della disuguaglianza va conservato se questa quantità è positiva mentre va rovesciato se questa quantità è negativa (2° principio).

Si possono a questo punto introdurre i principali tipi di disequazioni: razionali intere (di 1° e 2° grado), razionali fratte (e contenenti prodotti di polinomi), con valore assoluto, irrazionali, logaritmiche ed esponenziali, oltre ai sistemi di disequazioni.

1.2. Disequazioni razionali intere di 1° grado

Le disequazioni razionali intere di 1° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax + b \gtreqqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Da questa forma si ottiene facilmente la soluzione, che è:

$$x \gtreqqless -\frac{b}{a}$$

Esempio 1.5 *Risolvere la disequazione:*

$$4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, applicando i principi di equivalenza visti in precedenza si ottiene facilmente:

$$4x > 12$$

e poi:

$$x > 3$$

che è la soluzione.

Esempio 1.6 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica (in quanto $a < 0$), moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene allora innanzitutto:

$$4x + 12 < 0$$

che è la disequazione scritta nella forma canonica (in quanto $a > 0$). Da questa si ricava poi facilmente (applicando i principi di equivalenza visti in precedenza):

$$4x < -12$$

e poi:

$$x < -3$$

che è la soluzione.

1.3. Disequazioni razionali intere di 2° grado

Le disequazioni razionali intere di 2° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Per risolvere una disequazione di questo tipo si considera innanzitutto l'equazione di 2° grado associata:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e se ne calcolano le radici x_1 e x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$ nel caso di radici distinte).

Vale a questo punto la seguente regola:

- Per valori di x esterni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x < x_1$ e per $x > x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha lo stesso segno del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha lo stesso segno di a).
- Per valori di x interni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x_1 < x < x_2$) il trinomio ax^2+bx+c ha il segno opposto a quello del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha segno opposto a quello di a).
- Per valori di x uguali alle radici (cioè per $x = x_1$ e per $x = x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ è nullo.

Più precisamente, tenendo presente che un'equazione di 2° grado può avere 2 radici reali distinte, 2 radici reali coincidenti oppure nessuna radice reale, si possono distinguere i seguenti 3 casi:

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali distinte x_1, x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$) e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x < x_1 \quad \vee \quad x > x_2$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 < x < x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1 \quad \vee \quad x = x_2$$

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2+bx+c = 0$ possiede 2 radici reali coincidenti $x_1 = x_2$ e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x \neq x_1, x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1, x_2$$

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ non possiede radici reali e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La regola prima enunciata risulta quindi valida in generale, tenendo presente che se $\Delta = 0$ tutti i valori di x diversi dalle radici $x_1 = x_2$ sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici stesse (e quindi non vi sono valori di x interni a tale intervallo), mentre se $\Delta < 0$ tutti i valori di x sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici (intervallo che risulta in realtà essere vuoto, non essendovi tali radici, per cui anche in questo caso non vi sono valori di x interni ad esso).

Esempio 1.7 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, inoltre l'equazione associata:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

possiede due radici reali distinte $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -2 \quad \vee \quad x > 4$$

Esempio 1.8 *Risolvere la disequazione:*

$$-x^2 + 2x + 8 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica, conviene allora innanzitutto riscriverla in modo da ricondursi a tale forma; moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene:

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

la cui equazione associata (la stessa dell'esercizio precedente) ha radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$-2 < x < 4$$

Esempio 1.9 *Risolvere la disequazione:*

$$-6x^2 + 36x < 0$$

Riscrivendo la disequazione in forma canonica si ottiene innanzitutto:

$$6x^2 - 36x > 0$$

la cui equazione associata:

$$6x^2 - 36x = 0$$

ha radici $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 6$$

Esempio 1.10 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 \geq 9$$

Conviene innanzitutto ricondursi alla forma canonica scrivendo la disequazione nella forma:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

dopodiché si osserva che l'equazione associata:

$$x^2 - 9 = 0$$

possiede radici $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3$$

Esempio 1.11 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x + 1 < 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ha due radici reali coincidenti $x_1 = x_2 = 1$, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione non è mai soddisfatta (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione non è altro che $(x-1)^2$ che, essendo un quadrato, non potrà mai essere < 0).

Esempio 1.12 *Risolvere la disequazione:*

$$6x^2 + 5 > 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$6x^2 + 5 = 0$$

non possiede radici reali, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione è la somma di un termine non negativo, $6x^2$, e di un termine positivo, 5, quindi è strettamente positivo qualunque sia il valore di x, per cui la disequazione è sempre verificata).

1.4. Disequazioni razionali fratte

Le disequazioni razionali fratte sono quelle nelle quali l'incognita compare a denominatore di una frazione e si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \gtreqless 0$$

In questo caso occorre innanzitutto scartare i valori di x che annullano il denominatore della frazione $D(x)$ (in quanto una frazione con denominatore nullo perde significato), dopodiché si studia separatamente il segno di $N(x)$ e quello di $D(x)$ e, combinandoli attraverso la "regola dei segni", si determina il segno della frazione, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.13 *Risolvere la disequazione:*

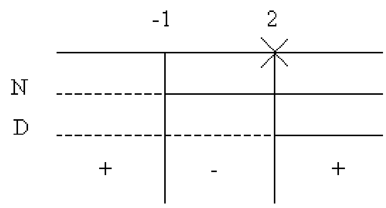
$$\frac{x+1}{4x-8} > 0$$

Deve essere innanzitutto $4x - 8 \neq 0$, da cui $x \neq 2$ (condizione di realtà della frazione). Studiando separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow 4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Il segno di $N(x)$ e di $D(x)$, insieme a quello globale della frazione, può essere rappresentato graficamente nel modo seguente (dove la linea continua indica gli intervalli in cui il segno è positivo e la linea tratteggiata gli intervalli in cui il segno è negativo, mentre la croce indica il valore escluso dal campo di esistenza):



Dall'analisi di questo grafico si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

Esempio 1.14 *Risolvere la disequazione:*

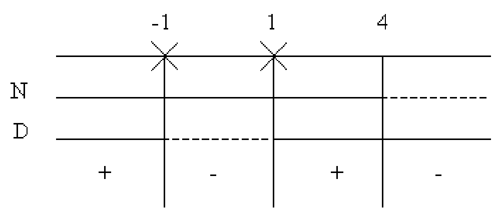
$$\frac{-x+4}{x^2-1} \leq 0$$

Deve essere innanzitutto $x^2 - 1 \neq 0$, da cui $x \neq \mp 1$ (condizione di realtà della frazione). Studiando il segno del numeratore e del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) \geq 0 \Rightarrow -x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \quad \vee \quad x > 1$$

e graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq 4$$

Poiché il segno di un prodotto segue le stesse regole del segno di un rapporto, lo stesso procedimento visto per risolvere le disequazioni razionali fratte può essere utilizzato anche per risolvere disequazioni contenenti solo prodotti di polinomi. In questo caso si studiano separatamente i segni dei singoli fattori e poi, combinandoli come visto in precedenza, si determina il segno del prodotto, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.15 *Risolvere la disequazione:*

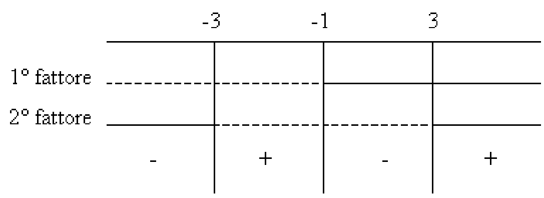
$$(x+1)(x^2-9) > 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

$$2^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x^2-9>0 \Rightarrow x<-3 \quad \vee \quad x>3$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-3<x<-1 \quad \vee \quad x>3$$

Esempio 1.16 *Risolvere la disequazione:*

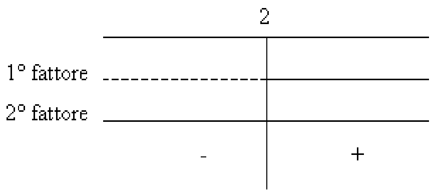
$$(x-2)(x^2-x+1) \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$2^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x^2-x+1 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$x \leq 2$$

1.5. Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è un insieme di due o più disequazioni che devono essere verificate simultaneamente. La soluzione del sistema è data dall'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni, e per risolvere un sistema di disequazioni occorre quindi risolvere ciascuna delle disequazioni che lo compongono e considerare poi solo le soluzioni che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema. A questo scopo è possibile utilizzare una rappresentazione grafica, in cui si indicano con una linea continua gli insiemi soluzione di ogni disequazione; il sistema è allora soddisfatto negli intervalli in corrispondenza dei quali tutte le linee (tante quante le disequazioni che compongono il sistema stesso) sono continue.

Esempio 1.17 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4x-8} > 0 \\ \\ -x^2 + 2x + 8 > 0 \end{cases}$$

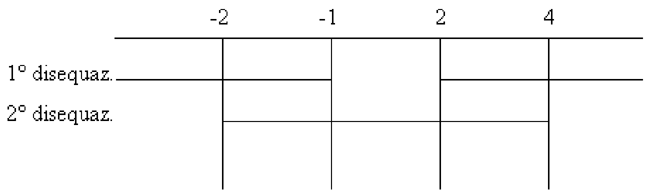
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, si è visto che la disequazione fratta ha soluzione:

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

mentre la disequazione di 2° grado ha soluzione:

$$-2 < x < 4$$

A questo punto è possibile rappresentare graficamente questi insiemi di soluzioni, ottenendo:



da cui si deduce che il sistema considerato ha soluzione:

$$-2 < x < -1 \quad \vee \quad 2 < x < 4$$

perché in corrispondenza di questi intervalli vi sono contemporaneamente due linee continue (tante quante le disequazioni che formano il sistema).

Esempio 1.18 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} -4x - 12 > 0 \\ \\ \dfrac{-x+4}{x^2-1} \leq 0 \end{cases}$$

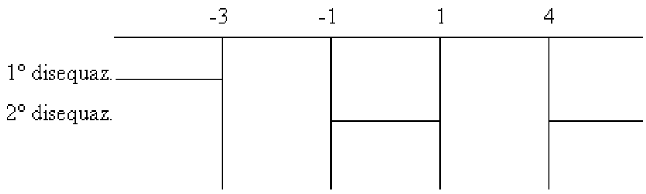
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, la prima ha soluzione:

$$x < -3$$

mentre la seconda ha soluzione:

$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq 4$$

Rappresentando graficamente questi insiemi di soluzioni si ottiene:



da cui si deduce che il sistema considerato non ammette soluzioni (perché in nessun intervallo dell'asse reale vi sono contemporaneamente due linee continue), cioè è impossibile.

1.6. Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni con valore assoluto sono quelle contenenti il valore assoluto di una o più espressioni. Dato $x \in \mathbb{R}$, il valore assoluto di x è definito nel modo seguente:

$$| x |= \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Più in generale, data un'espressione $f(x)$ che dipende da una quantità variabile x, il valore assoluto di $f(x)$ è definito come:

$$| f(x) |= \begin{cases} f(x) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ \\ -f(x) & \forall x : f(x) < 0 \end{cases}$$

Per definizione il valore assoluto di una determinata espressione è quindi sempre non negativo, e in particolare è nullo quando è nulla l'espressione contenuta nel valore assoluto.

Per risolvere una disequazione contenente uno o più valori assoluti è necessario "spezzarla" in due o più (sistemi di) disequazioni corrispondenti agli intervalli di positività e di negatività delle espressioni alle quali i valori assoluti si riferiscono, e la soluzione cercata è data dall'unione delle soluzioni di queste singole disequazioni.

Esempio 1.19 *Risolvere la disequazione:*

$$| x + 3 |< 1$$

Applicando la definizione di valore assoluto all'espressione $| x + 3 |$ si ottiene:

$$| x + 3 |= \begin{cases} x + 3 & \text{se} \quad x + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ \\ -x - 3 & \text{se} \quad x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$$

A questo punto, la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei due sistemi:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \\ x + 3 < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ \\ -x - 3 < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \\ x < -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -3 \\ \\ x > -4 \end{cases}$$

e poi:

$$-3 \leq x < -2 \quad \vee \quad -4 < x < -3$$

e infine:

$$-4 < x < -2$$

che rappresenta la soluzione della disequazione iniziale.

Un modo equivalente di risolvere una disequazione con valore assoluto come quella illustrata consiste nell'utilizzare il seguente procedimento:

1. Si distingue il caso in cui l'espressione contenuta nel valore assoluto è positiva o nulla da quello in cui l'espressione è negativa, e si scrivono le corrispondenti disequazioni.
2. Si risolve ciascuna delle disequazioni così ottenute e si combina la soluzione trovata con le condizioni ottenute distinguendo il caso in cui l'espressione contenuta nel valore assoluto è positiva o nulla da quello in cui l'espressione è negativa.
3. Si considera l'unione delle soluzioni trovate per ciascuna disequazione.

Utilizzando questo metodo, per risolvere la precedente disequazione si procede nel modo seguente:

a) Se $x + 3 \geq 0$, cioè $x \geq -3$, allora la disequazione è:

$$x + 3 < 1$$

da cui:

$$x < -2$$

purché sia anche $x \geq -3$ (che è l'insieme dei valori di x per i quali si ha $x + 3 \geq 0$, che è il caso che si sta considerando), per cui la soluzione di questa prima parte della disequazione è:

$$-3 \leq x < -2$$

che coincide con la soluzione del primo sistema ottenuto in precedenza.

b) Se $x + 3 < 0$, cioè $x < -3$, allora la disequazione è:

$$-x - 3 < 1$$

da cui:

$$x > -4$$

purché sia anche $x < -3$ (che è l'insieme dei valori di x per i quali si ha $x+3 < 0$, che è il caso che si sta considerando), per cui la soluzione di questa seconda parte della disequazione è:

$$-4 < x < -3$$

che coincide con la soluzione del secondo sistema ottenuto in precedenza.

c) Combinando i risultati ottenuti ai punti a) e b) si ha:

$$-4 < x < -2$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.20 *Risolvere la disequazione:*

$$\frac{| x+3 |}{| x-4 |} < 1$$

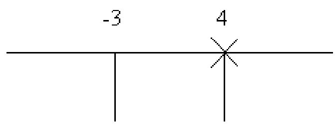
In questo caso occorre innanzitutto escludere i valori di x che annullano il denominatore, per cui deve essere $x - 4 \neq 0$, cioè $x \neq 4$. Quando nella disequazione compaiono più valori assoluti, poi, occorre necessariamente "spezzare" la disequazione in più (sistemi di) disequazioni, individuando gli intervalli nei quali una almeno delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno. Nel caso considerato si ha:

$$| x+3 | = \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x+3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ \\ -x-3 & \text{se} \quad x+3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$$

e poi:

$$| x-4 | = \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x-4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4 \\ \\ -x+4 & \text{se} \quad x-4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \end{cases}$$

per cui i valori "critici", che delimitano gli intervalli in corrispondenza di ciascuno dei quali una delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno, sono -3 e 4:



A questo punto la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei seguenti 3 sistemi (uno per ciascuno degli intervalli in cui una delle espressioni contenute nei valori assoluti cambia segno):

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-x-3}{-x+4} < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{x+3}{-x+4} < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-x-3}{-x+4} - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{x+3}{-x+4} - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases}$$

e poi:

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-7}{-x+4} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{2x-1}{-x+4} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{7}{x-4} < 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x < -3 \\ x < 4 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ x < \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x > 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \end{cases}$$

cioè:

$$x < -3 \quad \vee \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \emptyset$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$x < \frac{1}{2}$$

Esempio 1.21 *Risolvere la disequazione:*

$$\left|\frac{x+3}{x-4}\right| < 1$$

La disequazione è la stessa dell'esercizio precedente, nella quale però il valore assoluto del primo membro non viene spezzato nel rapporto tra valore assoluto del numeratore e valore assoluto del denominatore (per cui si viene ad avere un solo valore assoluto anziché due come accadeva prima). Anche in questo caso occorre innanzitutto escludere i valori di x che annullano il denominatore della frazione, per cui deve essere $x - 4 \neq 0$, cioè $x \neq 4$. Dalla definizione di valore assoluto applicata alla frazione $\frac{x+3}{x-4}$ si ha poi:

$$\left|\frac{x+3}{x-4}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} & \text{se } \dfrac{x+3}{x-4} \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ -\dfrac{x+3}{x-4} & \text{se } \dfrac{x+3}{x-4} < 0 \Rightarrow -3 < x < 4 \end{cases}$$

A questo punto la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei due sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} \geq 0 \\ \dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} < 0 \\ -\dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ -\dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases}$$

e poi:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \dfrac{7}{x-4} < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ \dfrac{-2x+1}{x-4} < 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ x < 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ x < \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x > 4 \end{cases}$$

cioè:

$$x \leq -3 \quad \vee \quad -3 < x < \frac{1}{2}$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$x < \frac{1}{2}$$

che è la stessa trovata nell'esercizio precedente.

Esempio 1.22 *Risolvere la disequazione:*

$$| x^2 - 7 | > -1$$

In questo caso è possibile osservare immediatamente che, poiché il valore assoluto di una certa espressione è, per definizione, non negativo, il primo membro è sempre ≥ 0, quindi sicuramente è maggiore di -1 e di conseguenza la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.7. Disequazioni irrazionali

Le disequazioni irrazionali sono quelle nelle quali l'incognita compare sotto il segno di radice. Per la loro soluzione occorre distinguere il caso in cui l'indice della radice è dispari e il caso in cui l'indice è pari.

Se la radice presente nella disequazione è di indice n dispari si ottiene una disequazione equivalente a quella data elevando entrambi i membri alla potenza n; non sono necessarie altre condizioni perché una radice di indice dispari può avere il radicando di segno qualsiasi e può essa stessa assumere segno qualsiasi. Se le radici sono più di una, eventualmente con indici diversi (sempre dispari), si elevano entrambi i membri alle potenze opportune in modo da eliminare le radici.

Esempio 1.23 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x^2 - 9} \leq -2$$

In questo caso elevando entrambi i membri al cubo si ottiene:

$$x^2 - 9 \leq -8$$

e poi:

$$x^2 - 1 \leq 0$$

da cui:

$$-1 \leq x \leq 1$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.24 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x+2} < \sqrt[9]{x^3 + 6x^2}$$

In questo caso elevando entrambi i membri alla nona si ottiene:

$$(x+2)^3 < x^3 + 6x^2$$

e poi:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 < x^3 + 6x^2$$

da cui:

$$x < -\frac{2}{3}$$

che è la soluzione della disequazione.

Se la radice presente nella disequazione, invece, è di indice n pari, è possibile risolvere la disequazione utilizzando il seguente procedimento:

1. Si individua il campo di esistenza della radice (richiedendo che il radicando sia non negativo), quindi si discutono i segni dei due membri.

2. Se i due membri sono discordi si individuano subito i valori dell'incognita per i quali la disequazione è soddisfatta.

3. Se i due membri sono concordi (in particolare non negativi, in caso contrario si rendono non negativi moltiplicando entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza) si elevano ad un'opportuna potenza in modo da eliminare le radici, quindi si risolve la disequazione.

4. Si considera l'unione delle soluzioni trovate ai punti 2) e 3).

Esempio 1.25 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 4 \leq \sqrt{x}$$

Applicando il procedimento sopra descritto si ha:

a) Deve essere innanzitutto $x \geq 0$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $x - 4 < 0$, cioè $x < 4$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x < 4$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$0 \leq x < 4$$

c) Se $x - 4 \geq 0$, cioè $x \geq 4$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(x - 4)^2 \leq x$$

cioè:

$$x^2 - 9x + 16 \leq 0$$

che ha soluzioni:

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq 4$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$4 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c) (cioè considerando la loro unione), infine, si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$0 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

Esempio 1.26 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 6 \geq \sqrt{6x - 1}$$

a) Deve essere innanzitutto $6x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq \dfrac{1}{6}$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $2x + 6 < 0$, cioè $x < -3$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione non è mai soddisfatta (in quanto una quantità negativa non è mai maggiore o uguale ad una quantità positiva o nulla).

c) Se $2x + 6 \geq 0$, cioè $x \geq -3$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(2x + 6)^2 \geq 6x - 1$$

cioè:

$$4x^2 + 18x + 37 \geq 0$$

che è sempre verificata, purché sia $x \geq \dfrac{1}{6}$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq -3$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

Esempio 1.27 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt{x^2 - 4x - 12} < \sqrt{x + 2}$$

Si deve avere innanzitutto, per la condizione di realtà delle radici:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \geq 0 \\ \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 6 \\ \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \quad \vee \quad x \geq 6$$

A questo punto si può osservare che sicuramente entrambi i membri della disequazione sono concordi (non negativi), in quanto si tratta di due radici ad indice pari, si possono allora elevare al quadrato ottenendo:

$$x^2 - 4x - 12 < x + 2$$

cioè:

$$x^2 - 5x - 14 < 0$$

che ha soluzione:

$$-2 < x < 7$$

Combinando questo risultato con la condizione di realtà si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$6 \leq x < 7$$

Esempio 1.28 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x + x^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}x}$$

a) Deve essere innanzitutto $x \geq 0$ (condizione di realtà della radice ad indice pari).

b) Se $x + x^2 < 0$, cioè $-1 < x < 0$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $-1 < x < 0$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Queste sono però condizioni incompatibili, per cui in realtà in questo caso la disequazione non ha soluzioni.

c) Se $x + x^2 \geq 0$, cioè $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 0$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare alla sesta e la disequazione diventa:

$$(x + x^2)^2 \leq \frac{1}{8}x^3$$

e poi:

$$x^4 + \frac{15}{8}x^3 + x^2 \leq 0$$

e infine:

$$x^2 \left(x^2 + \frac{15}{8}x + 1 \right) \leq 0$$

che è verificata solo per $x = 0$ (compatibile con la condizione di realtà $x \geq 0$ e con la condizione $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 0$ che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame).

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x = 0$$

Nel caso di disequazioni con radici ad indice pari è anche possibile trasformare tali disequazioni in sistemi ad esse equivalenti. In particolare, considerando una disequazione del tipo:

$$A(x) \geq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice) e anche $A(x) \geq 0$ (in quanto la radice a secondo membro è sicuramente non negativa, e quindi affinché la disequazione sia soddisfatta anche il primo membro deve essere non negativo), dopodiché è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che a questo punto sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice. La disequazione di partenza è quindi equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \geq B(x) \end{cases}$$

Considerando invece una disequazione del tipo:

$$A(x) \leq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice), se poi $A(x) \geq 0$ è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che in questo caso sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice, e la disequazione di partenza è soddisfatta dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases}$$

nel quale la prima condizione è superflua in quanto è implicata dalla terza (infatti se $B(x) \geq [A(x)]^2$ allora sicuramente $B(x) \geq 0$). In questo caso, inoltre, la disequazione di partenza è verificata anche quando $A(x) < 0$ (perché una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità non negativa quale è $\sqrt{B(x)}$), quindi essa è soddisfatta anche dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

e, in definitiva, la disequazione di partenza equivale all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

In questi casi, quindi, data la disequazione iniziale è possibile innanzitutto scrivere il sistema (o i sistemi) ad essa equivalente, dopodiché la soluzione di questo sistema corrisponde a quella della disequazione di partenza.

Esempio 1.29 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 6 \geq \sqrt{6x - 1}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.26) è scritta nella forma $A(x) \geq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi al sistema:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \\ (2x + 6)^2 \geq 6x - 1 \end{cases}$$

dal quale si ottiene:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \\ 4x^2 + 18x + 37 \geq 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{6} \\ x \geq -3 \\ \forall x \end{cases}$$

e infine:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.30 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 4 \leq \sqrt{x}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.25) è scritta nella forma $A(x) \leq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ (x-4)^2 \leq x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

dai quali si ottiene:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 9x + 16 \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \dfrac{9 - \sqrt{17}}{2} \leq x \leq \dfrac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

e poi:

$$4 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad 0 \leq x < 4$$

e infine:

$$0 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

1.8. Disequazioni logaritmiche

Dati due numeri a, $b > 0$ (con $a \neq 1$) si definisce logaritmo in base a di b il numero c al quale si deve elevare a per ottenere b; si ha quindi:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Dalla definizione di logaritmo si ha allora:

$$\log_a a^b = b \qquad\qquad a^{\log_a b} = b$$

per cui un qualsiasi numero b può essere espresso attraverso il logaritmo in una qualsiasi base $a > 0$ (e diversa da 1) utilizzando una delle due relazioni viste (la seconda può essere utilizzata solo quando $b > 0$). I logaritmi soddisfano inoltre le seguenti proprietà:

(i) $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0,\ a \neq 1$

(ii) se $0 < a < 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x > \log_a x' \quad$ con $x,\ x' > 0$

(iii) se $a > 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x < \log_a x' \quad$ con $x,\ x' > 0$

(iv) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \quad$ con $x,\ y > 0$

(v) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y} \quad$ con $x,\ y > 0$

(vi) $\log_a x^p = p \log_a x \quad$ con $x > 0$

(vii) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad$ con $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$

Le disequazioni logaritmiche sono quelle nelle quali l'incognita compare nell'argomento di un logaritmo. Per risolverle occorre innanzitutto richiedere che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (condizione di realtà), dopodiché si sfruttano le proprietà sopra elencate per giungere alla soluzione.

Esempio 1.31 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_{\frac{1}{2}} x < -3$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando semplicemente la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

cioè:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 8$$

e infine (applicando la proprietà (*ii*) vista sopra – poiché la base del logaritmo in questo caso è minore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra i rispettivi argomenti il verso della disuguaglianza va rovesciato –):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (essendo compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando le proprietà degli esponenziali (elencate nel prossimo paragrafo); in questo caso si può scrivere innanzitutto (applicando ad entrambi i membri della disequazione di partenza l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$, il che richiede di rovesciare la disuguaglianza poiché la base dell'esponenziale è minore di 1):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

dopodiché si ha (applicando semplicemente la definizione di logaritmo per quanto riguarda il primo membro):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Esempio 1.32 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_2 x > 4$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_2 x > \log_2 (2)^4$$

cioè:

$$\log_2 x > \log_2 16$$

e infine (applicando la proprietà (*iii*) vista sopra – poiché la base del logaritmo in questo caso è maggiore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra i rispettivi argomenti il verso della disuguaglianza si conserva –):

$$x > 16$$

che è la soluzione della disequazione (essendo compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando le proprietà degli esponenziali, in questo caso si può scrivere innanzitutto (applicando ad entrambi i membri della disequazione l'esponenziale di base 2, il che richiede di conservare la disuguaglianza poiché la base dell'esponenziale è maggiore di 1):

$$2^{\log_2 x} > 2^4$$

dopodiché si ha (applicando al primo membro la definizione di logaritmo):

$$x > 16$$

che è la soluzione della disequazione (compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Esempio 1.33 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{x+3} < 0$$

Si deve innanzitutto avere, per le condizioni di realtà della frazione e del logaritmo:

$$\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -3 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

dopodiché la disequazione di partenza può essere scritta nella forma:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{x+3} < \log_{\frac{1}{3}} 1$$

e passando agli argomenti (rovesciando la disuguaglianza, perché la base dei logaritmi è minore di 1):

$$\frac{x^2}{x+3} > 1$$

(la stessa espressione può essere ottenuta se, nella disequazione di partenza, si applica ai due membri l'esponenziale di base $\frac{1}{3}$). Questa è una disequazione razionale fratta, risolvendola come visto in precedenza (dopo averla ricondotta alla forma canonica $\frac{x^2}{x+3} - 1 > 0$ e avere eseguito i calcoli) si ottiene:

$$-3 < x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

che è compatibile con la condizione di realtà determinata inizialmente ($x > -3 \quad \wedge$ $x \neq 0$), per cui quella trovata è anche la soluzione della disequazione di partenza.

Esempio 1.34 *Risolvere la disequazione:*

$$\log \sqrt{x+4} \leq 2$$

Si deve innanzitutto avere, per le condizioni di realtà della radice e del logaritmo:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ \\ \sqrt{x+4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -4$$

A questo punto (tenendo presente che quando la base non è indicata il logaritmo si intende in base $e = 2.7182...$, quindi maggiore di 1) la disequazione di partenza può essere scritta come:

$$\log \sqrt{x+4} \leq \log e^2$$

da cui:

$$\sqrt{x+4} \leq e^2$$

(la stessa espressione può essere ottenuta se, nella disequazione di partenza, si applica ai due membri l'esponenziale di base e). Questa è una disequazione irrazionale che può essere risolta come visto in precedenza (in particolare, poiché entrambi i membri sono concordi non negativi si possono elevare al quadrato) ottenendo:

$$x \leq e^4 - 4$$

Combinando questa soluzione con la condizione di realtà trovata all'inizio ($x > -4$) si ottiene la soluzione della disequazione di partenza, che è:

$$-4 < x \leq e^4 - 4$$

1.9. Disequazioni esponenziali

Dato un numero $a > 0$ si indica con a^x una potenza di a ad esponente x reale. Si parla in questo caso di esponenziale, e gli esponenziali soddisfano le seguenti proprietà:

$$(i) \quad a^x > 0 \quad \forall x \text{ con } a > 0$$

$$(ii) \quad \text{se } 0 < a < 1 \text{ allora si ha } x < x' \Leftrightarrow a^x > a^{x'}$$

$$(iii) \quad \text{se } a > 1 \text{ allora si ha } x < x' \Leftrightarrow a^x < a^{x'}$$

Le disequazioni esponenziali sono quelle nelle quali l'incognita compare ad esponente di una certa espressione, e per risolverle si sfruttano le proprietà sopra elencate.

Esempio 1.35 *Risolvere la disequazione:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 32$$

Si può innanzitutto riscrivere la disequazione nella forma:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

e poi (applicando la proprietà (ii) vista sopra – poiché la base dell'esponenziale in questo caso è minore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra gli esponenziali a quella tra i rispettivi esponenti il verso della disuguaglianza va rovesciato –):

$$x > -5$$

che è la soluzione della disequazione.

Lo stesso risultato può essere ottenuto servendosi dei logaritmi (in effetti le disequazioni esponenziali e quelle logaritmiche sono tra di loro strettamente legate, essendo esponenziali e logaritmi funzioni una inversa dell'altra). In particolare, partendo dalla disequazione data e applicando ad entrambi i membri il logaritmo in base $\frac{1}{2}$ (il che richiede di cambiare verso alla disuguaglianza, essendo la base minore di 1) si ottiene innanzitutto:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} 32$$

e poi (applicando semplicemente la definizione di logaritmo):

$$x > -5$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.36 *Risolvere la disequazione:*

$$4^x > 16$$

Si può innanzitutto riscrivere la disequazione nella forma:

$$4^x > 4^2$$

e poi (applicando la proprietà (*iii*) vista sopra – poiché la base dell'esponenziale in questo caso è maggiore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra gli esponenziali a quella tra i rispettivi esponenti il verso della disuguaglianza si conserva –):

$$x > 2$$

che è la soluzione della disequazione.

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando ad entrambi i membri della disequazione iniziale il logaritmo in base 4 (mantenendo il verso della disuguaglianza, poiché la base in questo caso è maggiore di 1), per cui si ha:

$$\log_4 4^x > \log_4 16$$

e poi (applicando la definizione di logaritmo):

$$x > 2$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.37 *Risolvere la disequazione:*

$$3^{2x+1} + 3^x - 1 < 0$$

Questa disequazione può innanzitutto essere scritta come:

$$3 \cdot 3^{2x} + 3^x - 1 < 0$$

e poi, ponendo $3^x = z$, si ha:

$$3z^2 + z - 1 < 0$$

che è una disequazione di 2° grado la cui soluzione è:

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < z < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

Tornando alla variabile di partenza si ha:

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < 3^x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

dove la prima disuguaglianza è sicuramente verificata (poiché 3^x è sempre positivo, quindi maggiore della quantità negativa $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$), mentre la seconda disuguaglianza (applicando ad entrambi i membri il logaritmo in base 3) conduce a:

$$x < \log_3 \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

che è la soluzione della disequazione di partenza.

Esempio 1.38 *Risolvere la disequazione:*

$$3^{x-1} > 4^{x+1}$$

Applicando il logaritmo in base e ad entrambi i membri si ha innanzitutto:

$$\log 3^{x-1} > \log 4^{x+1}$$

cioè:

$$(x-1)\log 3 > (x+1)\log 4$$

e con alcuni semplici calcoli si ottiene:

$$x(\log 3 - \log 4) > \log 3 + \log 4$$

da cui (tenendo presente che la quantità $(\log 3 - \log 4)$ è negativa, per cui quando si dividono entrambi i membri per questa quantità la disuguaglianza va rovesciata):

$$x < \frac{\log 3 + \log 4}{\log 3 - \log 4}$$

che è la soluzione della disequazione data.

1.10. Esercizi da svolgere

Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $3x + 2 < -1$

2) $3(x + 2) - 4(x + 3) \leq 1$

3) $x^2 + 4x - 21 > 0$

4) $3x^2 - 15x \leq 0$

5) $x^2 - 6x + 9 > 0$

6) $2x^2 - 15x + 30 < 0$

7) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} \leq 0$

8) $\dfrac{4x - 5}{5x} < 4x$

9) $(x - 3)^2(x + 5) \leq 0$

10) $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5) \leq 0$

11) $\begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 3x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 + 4x - 21 > 0 \\ 3x^2 - 15x \leq 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ 2x^2 - 15x + 30 < 0 \end{cases}$

15) $\mid x^2 - 2x + 5 \mid \leq -3$

16) $\left|x^2 - 4\right| > x - 2$

17) $\mid x - 2 \mid < \mid x \mid$

18) $\dfrac{|x+5|}{2-|x|} \geq 0$

19) $\sqrt{x^2 - 4} < x$

20) $\sqrt{x+5} < x - 1$

21) $\sqrt{x^2 - 4} < x - 4$

22) $\sqrt{x+1} > \sqrt[3]{x-1}$

23) $\log_3(x+2) < 2$

24) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) < 2$

25) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+7) < -2$

26) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-1} \geq -1$

27) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-4x} \leq 1$

28) $4^x + 2^x - 2 < 0$

29) $4 \cdot 3^x \leq 2 \cdot 4^x$

30) $2^{x+1} > 3^{x-1}$

Capitolo 2

Funzioni

2.1. Definizioni

Dati due insiemi (non vuoti) X e Y, si chiama funzione (o applicazione, o corrispondenza) di X in Y una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno e un solo elemento $y \in Y$. Si scrive in questo caso:

$$f : X \to Y$$

e anche:

$$y = f(x)$$

e si dice che y costituisce l'immagine, tramite la funzione f, di x. L'insieme X prende il nome di dominio (o insieme di definizione, o campo di esistenza), mentre l'insieme Y prende il nome di codominio, e il sottoinsieme (proprio o improprio) di Y costituito dagli elementi $y \in Y$ per i quali esiste un elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$ (cioè il sottoinsieme di Y costituito dagli elementi che sono immagini di elementi di X) prende il nome di insieme delle immagini (in pratica, il codominio è l'insieme in cui, a priori, la funzione può assumere valori, mentre l'insieme delle immagini è l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla funzione). La variabile x, inoltre, viene detta variabile indipendente, mentre la variabile y viene detta variabile dipendente.

Le funzioni che vengono prese in esame in questo Capitolo (e anche nei Capitoli 3, 4 e 5) sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e assumono valori in $\mathbb{R}$, cioè sono funzioni reali di variabile reale:

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x)$$

mentre nel Capitolo 7 verranno introdotte le funzioni che sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (dove quest'ultimo è l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali) e che assumono valori in $\mathbb{R}$, cioè funzioni reali di più variabili reali:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

È possibile a questo punto analizzare i diversi elementi che caratterizzano una funzione, allo scopo di ottenere le informazioni che consentono di realizzare lo studio della funzione stessa.

2.2. Dominio di una funzione

Il primo problema da affrontare nello studio di una funzione è costituito dall'individuazione del suo dominio (mentre, in generale, non si procede all'individuazione dell'insieme delle immagini, che in molti casi non è agevole da determinare, e ci si limita ad indicare il codominio – che per le funzioni considerate è costituito dall'insieme $\mathbb{R}$ –). Con riferimento a questo aspetto si possono incontrare i seguenti tipi di problemi, che richiedono di imporre le corrispondenti condizioni di realtà, allo scopo di giungere alla determinazione del campo di esistenza della funzione in esame:

1. Se la variabile indipendente compare al denominatore di una frazione si deve richiedere che il denominatore sia non nullo.
2. Se la variabile indipendente compare sotto il segno di una radice ad indice pari si deve richiedere che il radicando sia non negativo.
3. Se la variabile indipendente compare nell'argomento di un logaritmo si deve richiedere che l'argomento sia strettamente positivo.
4. Se la variabile indipendente compare sia nella base sia nell'esponente di una potenza, cioè si ha un'espressione del tipo $f(x)^{g(x)}$, si deve richiedere che la base della potenza sia strettamente positiva (come risulta evidente riscrivendo la funzione nella forma $e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$, nella quale $f(x)$ diventa l'argomento di un logaritmo, e quindi deve essere strettamente maggiore di zero).

Esempio 2.1 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x+5}$$

In questo caso deve essere $x + 5 \neq 0$, cioè $x \neq -5$, per cui il dominio è:

$$D = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$$

Esempio 2.2 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{x-5} + 3x$$

In questo caso deve essere $x - 5 \geq 0$, cioè $x \geq 5$, per cui il dominio è:

$$D = [5, +\infty)$$

Esempio 2.3 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \log(x^2 - 9)$$

In questo caso deve essere $x^2 - 9 > 0$, cioè $x < -3 \quad \vee \quad x > 3$, per cui il dominio è:

$$D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

Esempio 2.4 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = (2x)^{x+7} + 5$$

In questo caso deve essere $2x > 0$, cioè $x > 0$, per cui il dominio è:

$$D = (0, +\infty)$$

Spesso alcune di queste situazioni si presentano contemporaneamente, per cui per determinare il campo di esistenza di una funzione occorre considerare solo quei valori della x che soddisfano contemporaneamente le diverse condizioni imposte (cioè occorre risolvere un sistema di disequazioni e/o inuguaglianze).

Esempio 2.5 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{\log(x-1)}$$

In questo caso si deve avere contemporaneamente:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \\ \log(x-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ \\ x - 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

per cui il dominio è:

$$D = [2, +\infty)$$

Esempio 2.6 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \left(\frac{2}{x+3}\right)^{3x}$$

In questo caso si deve avere contemporaneamente:

$$\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \\ \dfrac{2}{x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > -3$$

per cui il dominio è:

$$D = (-3, +\infty)$$

2.3. Intersezioni con gli assi e segno di una funzione

Dopo l'individuazione del dominio di una funzione, il passo successivo consiste nella determinazione delle intersezioni (se esistono) della funzione con gli assi cartesiani e nello studio del segno della funzione stessa.

In particolare, le intersezioni con gli assi si ottengono risolvendo il sistema formato dall'equazione che costituisce l'espressione analitica della funzione e dall'equazione dell'asse in questione, mentre il segno di una funzione si ottiene determinando innanzitutto l'insieme dei valori della x per i quali la funzione è positiva o nulla (cioè risolvendo la disequazione $f(x) \geq 0$), dopodiché si ha che per i valori rimanenti della x (appartenenti al campo di esistenza) la funzione è negativa.

Esempio 2.7 *Determinare intersezioni con gli assi e segno della funzione:*

$$f(x) = x^2 - 8x + 15$$

Si può innanzitutto osservare che non vi sono restrizioni da imporre al dominio della funzione, che quindi coincide con $\mathbb{R}$. A questo punto le (eventuali) intersezioni con l'asse x si individuano risolvendo il sistema formato dall'equazione $y = f(x)$ e dall'equazione dell'asse delle ascisse (che è $y = 0$):

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 15 \\ \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui la funzione interseca l'asse x nei punti $A = (3, 0)$ e $B = (5, 0)$. L'intersezione (eventuale) con l'asse y si individua invece risolvendo il sistema formato dall'equazione $y = f(x)$ e dall'equazione dell'asse delle ordinate (che è $x = 0$):

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 15 \\ \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 15 \end{cases}$$

per cui la fuzione interseca l'asse y nel punto $C = (0, 15)$ (per definizione di funzione vi è al massimo un'intersezione con l'asse delle y, in quanto ad un valore delle x – nel caso specifico $x = 0$ – corrisponde al più un valore $y = f(x)$).

Per studiare il segno della funzione sul suo dominio occorre invece risolvere innanzitutto la disequazione:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \vee \quad x \geq 5$$

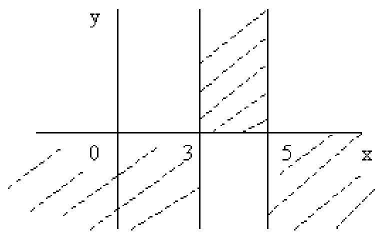
dopodiché si ha:

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad 3 < x < 5$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 5$$

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 3 \quad \vee \quad x > 5$$

I risultati ottenuti possono anche essere rappresentati graficamente nel seguente modo (il tratteggio indica le parti del piano in cui non può trovarsi la funzione):



In effetti, quella considerata non è altro che l'espressione analitica di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e che passa per i punti A, B e C sopra determinati; tale parabola si trova nel semipiano positivo delle y per valori di x minori di 3 e maggiori di 5, e nel semipiano negativo delle y per valori di x compresi tra 3 e 5, mentre interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di $x = 3$ e $x = 5$ e l'asse delle ordinate in corrispondenza di $y = 15$.

Esempio 2.8 *Determinare intersezioni con gli assi e segno della funzione:*

$$f(x) = \frac{\log x}{x^3}$$

Occorre innanzitutto determinare il dominio della funzione, che si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

per cui il campo di esistenza della funzione è dato dall'intervallo $(0, +\infty)$. A questo punto le (eventuali) intersezioni con l'asse x si individuano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\log x}{x^3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui la funzione interseca l'asse x nel punto $A = (1, 0)$. Non vi sono invece intersezioni con l'asse y, in quanto per $x = 0$ (che è l'equazione dell'asse delle ordinate) la funzione non è definita (deve infatti essere $x > 0$ come visto sopra).

Per studiare il segno della funzione sul suo dominio, poi, occorre innanzitutto risolvere la disequazione:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{\log x}{x^3} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

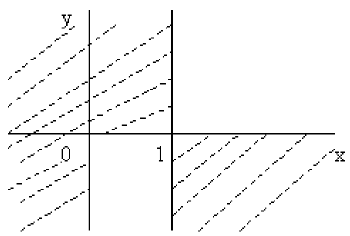
dopodiché si ha:

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1$$

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

e graficamente:



2.4. Funzioni pari, dispari, periodiche

Nello studio di una funzione, dopo l'individuazione del suo dominio, delle (eventuali) intersezioni con gli assi e del segno interessa scoprire la presenza di eventuali simmetrie e periodicità. A questo proposito, una funzione si dice pari se vale:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

mentre una funzione si dice dispari se vale:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D$$

dove con D si indica il dominio della funzione (che deve essere simmetrico rispetto all'origine).

Una funzione invece si dice periodica di periodo t quando t è il più piccolo numero reale positivo per il quale si ha:

$$f(x+t) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

Una funzione pari è caratterizzata dal fatto che il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(-x, y)$ appartiene allo stesso grafico), mentre una funzione dispari è caratterizzata dal fatto che il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(-x, -y)$ appartiene allo stesso grafico). Una funzione periodica di periodo t, invece, è caratterizzata dal fatto che il suo grafico si ripete dopo ogni intervallo di ampiezza t (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(x+t, y)$ appartiene allo stesso grafico).

Nel caso di funzioni pari o dispari, quindi, è sufficiente effettuare lo studio per $x \geq 0$, dopodiché il grafico complessivo della funzione si ottiene ribaltando quello ottenuto per valori non negativi delle x rispetto all'asse y (nel caso di funzioni pari) oppure rispetto all'origine (nel caso di funzioni dispari). Nel caso di funzioni periodiche, invece, è sufficiente effettuare lo studio su di un intervallo, appartenente al dominio, di ampiezza t, dopodiché il grafico complessivo della funzione si ottiene riportando più volte quello così ottenuto.

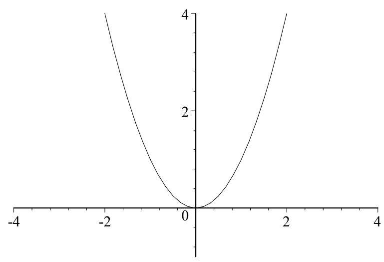
Un semplice esempio di funzione pari è costituito da:

$$y = f(x) = x^2$$

per la quale si ha:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché la funzione sia pari. Il suo grafico è:



e in questo caso risulta evidente la simmetria rispetto all'asse delle y.

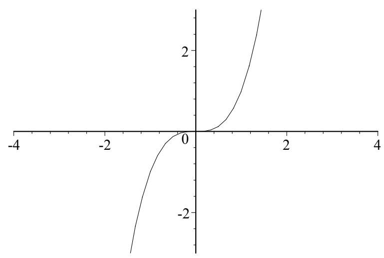
Un semplice esempio di funzione dispari, invece, è costituito da:

$$y = f(x) = x^3$$

per la quale si ha:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché la funzione sia dispari. Il suo grafico è:



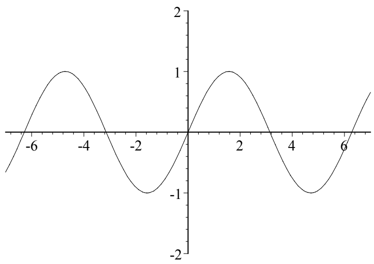
e in questo caso risulta evidente la simmetria rispetto all'origine.

Semplici esempi di funzioni periodiche (di periodo 2π), infine, sono il seno e il coseno, per le quali si ha:

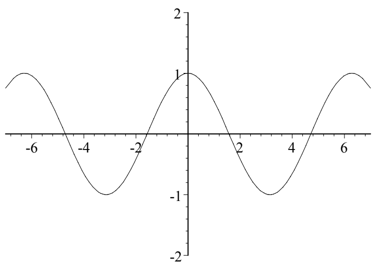
$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché una funzione sia periodica. Il grafico del seno è:



mentre quello del coseno è:



e risulta evidente che i grafici delle due funzioni si ripetono dopo un intervallo di ampiezza costante (pari a 2π). In aggiunta, queste due funzioni risultano anche simmetriche, in particolare il seno è una funzione dispari (infatti $\sin(-x) = -\sin x$) mentre il coseno è una funzione pari (infatti $\cos(-x) = \cos x$), come si può osservare graficamente.

Esempio 2.9 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = 2(3^x + 3^{-x})$$

Si ha in questo caso:

$$f(-x) = 2(3^{-x} + 3^{-(-x)}) = 2(3^{-x} + 3^x) = f(x)$$

per cui la funzione è pari.

Esempio 2.10 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = \sqrt{3 - x^5} - \sqrt{3 + x^5}$$

Si ha in questo caso:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{3 - (-x)^5} - \sqrt{3 + (-x)^5} = \sqrt{3 - (-x^5)} - \sqrt{3 + (-x^5)} = \\ &= \sqrt{3 + x^5} - \sqrt{3 - x^5} = -\left(\sqrt{3 - x^5} - \sqrt{3 + x^5}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

per cui la funzione è dispari.

Esempio 2.11 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = |x| + 2x$$

Si ha in questo caso:

$$f(-x) = |-x| + 2(-x) = |x| - 2x$$

e poiché quest'ultima espressione non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$ la funzione considerata non presenta simmetrie (cioè non è né pari né dispari).

Esempio 2.12 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = -\sin 2x$$

Si ha in questo caso innanzitutto:

$$f(-x) = -\sin 2(-x) = -\sin(-2x) = \sin 2x = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari, inoltre:

$$f(x + \pi) = -\sin 2(x + \pi) = -\sin(2x + 2\pi) = -\sin 2x = f(x)$$

per cui la funzione è anche periodica, di periodo π.

2.5. Funzioni elementari e traslazioni

Con il termine di funzioni elementari si indicano le funzioni (lineari, quadratiche, potenza, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche – oltre a quelle da esse ottenibili attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione che verrà introdotta nel prossimo paragrafo –) a partire dalle quali è possibile ottenere funzioni più complesse. Dai grafici di queste funzioni (e più in generale dai grafici di funzioni note), inoltre, si possono ricavare facilmente i grafici di altre funzioni, legate a quelle di partenza da determinate relazioni. In particolare, conoscendo il grafico di $y = f(x)$ è possibile ottenere agevolmente i grafici di:

$$y = -f(x) \qquad y = f(-x)$$

$$y = f(x) + c \ \text{ con } c \in \mathbb{R} \qquad y = f(x + c) \ \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

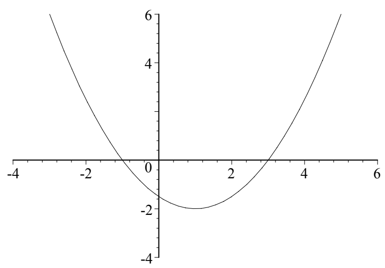
$$y = cf(x) \ \text{ con } c \in \mathbb{R} \qquad y = f(cx) \ \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

$$y = |f(x)| \qquad y = f(|x|)$$

Un esempio può essere illustrato considerando come funzione di partenza:

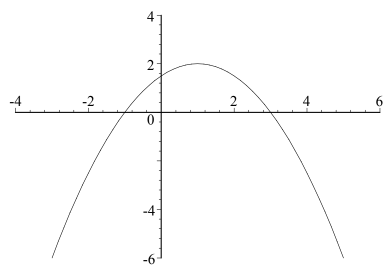
$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

che è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto la quale interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza dei punti $A = (-1, 0)$ e $B = (3, 0)$ e l'asse delle ordinate in corrispondenza del punto $C = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$, e il cui grafico è il seguente:

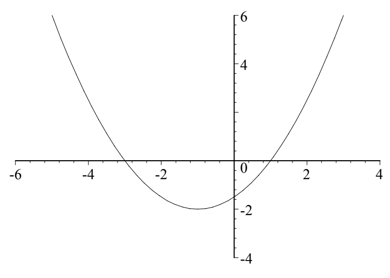


Da questo si ricavano facilmente i seguenti altri grafici:

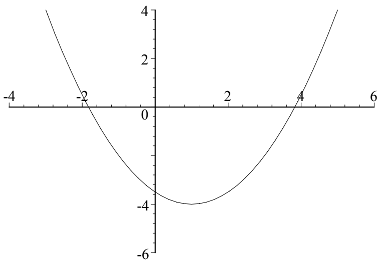
- Il grafico di $y = -f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "ribaltandolo" rispetto all'asse delle x:



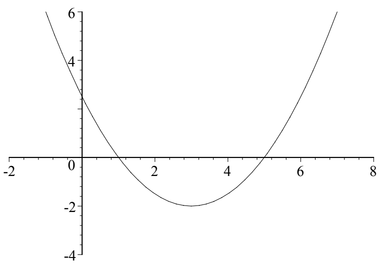
- Il grafico di $y = f(-x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{2}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "ribaltandolo" rispetto all'asse delle y:



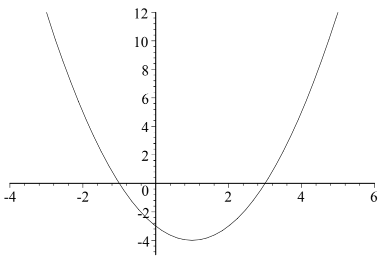
- Il grafico di $y = f(x) + c \quad$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ traslandolo della quantità $|c|$ verso l'alto (se $c > 0$) oppure verso il basso (se $c < 0$). Ad esempio, nel caso di $c = -2$ si ottiene $y = f(x) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2}$ il cui grafico è:



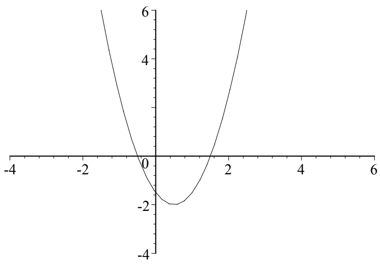
- Il grafico di $y = f(x + c) \quad$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ traslandolo della quantità $|c|$ a sinistra (se $c > 0$) oppure a destra (se $c < 0$). Ad esempio, nel caso di $c = -2$ si ottiene $y = f(x - 2) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ il cui grafico è:



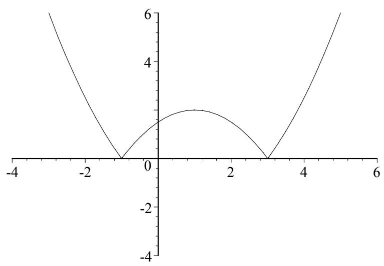
- Il grafico di $y = cf(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "dilatandolo" di c volte nel senso dell'asse delle ordinate (più precisamente, il grafico risulta dilatato rispetto a quello di partenza se $c > 1$, mentre risulta compresso rispetto a quello di partenza se $0 < c < 1$ – e se $c < 0$ valgono considerazioni analoghe ma in aggiunta il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse delle x, come indicato nella prima delle trasformazioni considerate –). Ad esempio, nel caso di $c = 2$ si ottiene $y = 2f(x) = x^2 - 2x - 3$ il cui grafico è:



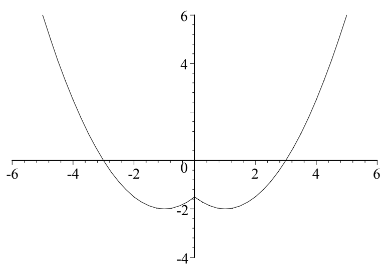
- Il grafico di $y = f(cx)$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "comprimendolo" di c volte nel senso dell'asse delle ascisse (più precisamente, il grafico risulta compresso rispetto a quello di partenza se $c > 1$, mentre risulta dilatato rispetto a quello di partenza se $0 < c < 1$ – e se $c < 0$ valgono considerazioni analoghe ma in aggiunta il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse delle y, come indicato nella seconda delle trasformazioni considerate –). Ad esempio, nel caso di $c = 2$ si ottiene $y = f(2x) = 2x^2 - 2x - \dfrac{3}{2}$ il cui grafico è:



- Il grafico di $y = |f(x)| = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}\right|$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando nel semipiano delle $y > 0$ la parte del grafico stesso che è contenuta nel semipiano delle $y < 0$:



- Il grafico di $y = f(|x|) = \dfrac{1}{2}x^2 - |x| - \dfrac{3}{2}$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando nel semipiano delle $x < 0$ la parte del grafico stesso che è contenuta nel semipiano delle $x > 0$:



2.6. Funzioni composte

Date le funzioni reali di variabile reale:

$$y = f(x) \qquad x = g(t)$$

si chiama funzione composta $f \circ g$ la funzione (dove è definita):

$$y = f(g(t))$$

Per l'esistenza di questa funzione è necessario che l'insieme immagine di $g(t)$ sia contenuto nel dominio di $f(x)$, cioè se si ha:

$$g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

deve essere $g(A) \subseteq B$. È questa la condizione da verificare per stabilire se la funzione composta esiste. In pratica, date le due funzioni f e g si scrive subito la funzione composta $f \circ g$, dopodiché si impongono le (eventuali) condizioni di realtà richieste dall'espressione analitica della funzione, e in questo modo si individua il dominio della funzione composta (eventualmente vuoto, nel qual caso la funzione composta non esiste). In modo analogo è possibile individuare (se esiste) la funzione composta $g \circ f$. L'operazione di composizione non è commutativa, cioè anche quando esistono sia $f \circ g$ sia $g \circ f$, in generale si ha $f \circ g \neq g \circ f$.

Esempio 2.13 *Date le funzioni:*

$$f(x) = x^3 + 5 \qquad g(t) = e^t + 2$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = e^t + 2$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \left(e^t + 2\right)^3 + 5$$

e, poiché non vi sono condizioni di realtà da imporre, questa è la funzione composta $f \circ g$, che risulta definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = x^3 + 5$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = e^{x^3+5} + 2$$

e, poiché anche in questo caso non vi sono condizioni di realtà da imporre, questa è la funzione composta $g \circ f$, che risulta definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Si può inoltre osservare che, pur essendo definite sia $f \circ g$ sia $g \circ f$, si ha $f \circ g \neq g \circ f$.

Esempio 2.14 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \log x \qquad\qquad g(t) = \sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ *e* $g \circ f$*.*

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = \sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \log(\sqrt{t})$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà (della radice e del logaritmo):

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t > 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \log(\sqrt{t}) \qquad \text{per } t > 0$$

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \log x$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = \sqrt{\log x}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà (del logaritmo e della radice):

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{\log x} \qquad \text{per } x \geq 1$$

Esempio 2.15 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \log x \qquad\qquad g(t) = -\sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ *e* $g \circ f$*.*

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = -\sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \log(-\sqrt{t})$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ -\sqrt{t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

per cui la funzione composta $f \circ g$ non esiste (in quanto la funzione g assume sempre valori non positivi, che quindi non appartengono al dominio della funzione f, costituito dai valori strettamente positivi).

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \log x$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = -\sqrt{\log x}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = -\sqrt{\log x} \qquad \text{per } x \geq 1$$

Esempio 2.16 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad g(t) = -\sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = -\sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \sqrt{-\sqrt{t}}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ -\sqrt{t} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

per cui la funzione composta cercata (definita in un solo punto) è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \sqrt{-\sqrt{t}} \qquad \text{per } t = 0$$

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \sqrt{x}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = -\sqrt{\sqrt{x}}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = -\sqrt{\sqrt{x}} = -\sqrt[4]{x} \qquad \text{per } x \geq 0$$

Esempio 2.17 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \textit{per} \quad x \geq 0 \\ \\ \log(5-x) & \textit{per} \quad x < 0 \end{cases} \qquad\qquad g(t) = \frac{1}{t}$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ *e* $g \circ f$.

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = \frac{1}{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{t}} & \text{per} \quad x \geq 0 \\ \\ \log\left(5 - \dfrac{1}{t}\right) & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

A questo punto è necessario esprimere gli intervalli di definizione della funzione in termini della variabile t (in quanto la funzione composta dipende appunto da t) – così facendo si garantisce anche il rispetto delle condizioni di realtà –. Tenendo presente che vale $x = g(t) = \dfrac{1}{t}$ si ha allora:

$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{t} \geq 0 \Rightarrow t > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{1}{t} < 0 \Rightarrow t < 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{t}} & \text{per} \quad t > 0 \\ \\ \log\left(5 - \dfrac{1}{t}\right) & \text{per} \quad t < 0 \end{cases}$$

In particolare, è possibile osservare come questa funzione non sia definita in $t = 0$; in effetti in questo punto non è definita la funzione $g(t)$, per cui non può esserlo neanche la funzione $f(g(t))$.

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{per} \quad x \geq 0 \\ \\ \log(5-x) & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{per} \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{\log(5-x)} & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

In questo caso gli intervalli di definizione della funzione sono già espressi in termini della variabile corretta (la x), occorre però imporre le condizioni di realtà su ciascuno dei due intervalli in cui è definita la funzione; sul primo intervallo si ha:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

mentre sul secondo intervallo si ha:

$$\begin{cases} x < 0 \\ \\ \log(5-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow x < 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{per} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{\log(5-x)} & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

In particolare, è possibile osservare come questa funzione non sia definita in $x = 0$, nonostante in questo punto sia definita $f(x)$. Ciò è dovuto al fatto che in $x = 0$ la funzione $f(x)$ vale 0 e quindi non può essere utilizzata come argomento della funzione $g(t)$ (che appunto non è definita in $t = 0$); di conseguenza, anche la funzione $g(f(x))$ non è definita in $x = 0$.

Esempio 2.18 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & per \quad x \leq 0 \\ \\ \sqrt{x} & per \quad x > 1 \end{cases} \qquad\qquad g(t) = \begin{cases} t+2 & per \quad t \geq 1 \\ \\ t^2 - 2t + 5 & per \quad t < 1 \end{cases}$$

determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = \begin{cases} t+2 & \text{per} \quad t \geq 1 \\ \\ t^2 - 2t + 5 & \text{per} \quad t < 1 \end{cases}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene (tenendo presente che è possibile combinare ciascuna delle due espressioni in cui è "spezzata" la funzione f con ciascuna delle due espressioni in cui è "spezzata" la funzione g, per cui si hanno in tutto quattro possibili combinazioni):

$$f(g(t)) = \begin{cases} (t+2)^2 & \text{per} & \begin{array}{c} x \leq 0 \\ t \geq 1 \end{array} \\ \\ (t^2 - 2t + 5)^2 & \text{per} & \begin{array}{c} x \leq 0 \\ t < 1 \end{array} \\ \\ \sqrt{t+2} & \text{per} & \begin{array}{c} x > 1 \\ t \geq 1 \end{array} \\ \\ \sqrt{t^2 - 2t + 5} & \text{per} & \begin{array}{c} x > 1 \\ t < 1 \end{array} \end{cases}$$

A questo punto è necessario esprimere ciascuno degli intervalli di definizione della funzione in termini della variabile t (in quanto la funzione composta dipende appunto da t) – così facendo si garantisce anche il rispetto delle condizioni di realtà –. Si ha allora per i diversi intervalli (tenendo conto di quella che, in ogni intervallo, è l'espressione corretta da usare per $x = g(t)$):

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \leq 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 5 \leq 0 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{impossibile} \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 > 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow t \geq 1$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 5 > 1 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 4 > 0 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall t \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow t < 1$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \begin{cases} \sqrt{t+2} & \text{per} \quad t \geq 1 \\ \sqrt{t^2 - 2t + 5} & \text{per} \quad t < 1 \end{cases}$$

In modo analogo, per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{per} \quad \begin{matrix} t \geq 1 \\ x \leq 0 \end{matrix} \\ \sqrt{x} + 2 & \text{per} \quad \begin{matrix} t \geq 1 \\ x > 1 \end{matrix} \\ x^4 - 2x^2 + 5 & \text{per} \quad \begin{matrix} t < 1 \\ x \leq 0 \end{matrix} \\ x - 2\sqrt{x} + 5 & \text{per} \quad \begin{matrix} t < 1 \\ x > 1 \end{matrix} \end{cases}$$

A questo punto è necessario esprimere ciascuno degli intervalli di definizione della funzione in termini della variabile x (in quanto la funzione composta dipende appunto da x) – così facendo si garantisce anche il rispetto delle condizioni di realtà –. Si ha allora per i diversi intervalli (tenendo conto di quella che, in ogni intervallo, è l'espressione corretta da usare per $t = f(x)$):

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq -1$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$\begin{cases} t < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x \leq 0$$

$$\begin{cases} t < 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{per} \quad x \leq -1 \\ x^4 - 2x^2 + 5 & \text{per} \quad -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

In particolare, è possibile osservare come questa funzione non sia definita nell'intervallo $(0, 1]$; in effetti, in questo intervallo non è definita la funzione $f(x)$, per cui non può esserlo neanche la funzione $g(f(x))$.

2.7. Funzioni inverse

Data una funzione iniettiva:

$$y = f(x) \qquad \text{con } f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si chiama inversa di $f(x)$ la funzione:

$$x = g(y) \qquad \text{con } g : f(X) \to X$$

tale che:

$$f(g(y)) = y$$

e tale funzione inversa si indica anche con il simbolo f^{-1}, per cui si può scrivere $x = f^{-1}(y)$.

Si ricorda che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se vale:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

cioè elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. L'iniettività di f è essenziale per garantire che ad un qualsiasi elemento $y \in f(X)$ corrisponda un unico elemento $x \in X$ (così che quella definita da $f(X)$ in X è effettivamente una funzione), e corrisponde alla proprietà per cui ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in un solo punto.

Si può inoltre osservare che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua è invertibile su X se e solo se è strettamente monotona su X; se invece la funzione non è continua, allora la stretta monotonia è solo una condizione sufficiente (non necessaria) per l'invertibilità, cioè si ha:

(i) f continua $\qquad$ f invertibile $\Leftrightarrow$ f strettamente monotona

(ii) f non continua $\qquad$ f strettamente monotona $\Rightarrow$ f invertibile

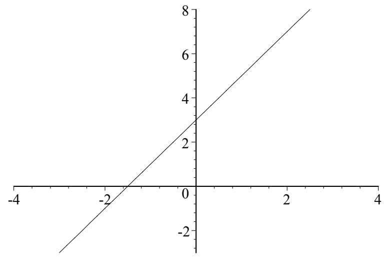
Data una funzione $y = f(x)$, per stabilire se essa è invertibile occorre quindi verificare innanzitutto che sia iniettiva. A questo punto è possibile ricavare l'espressione analitica della funzione inversa esprimendo la variabile x in termini della variabile y, ottenendo quindi $x = f^{-1}(y)$. Si deve inoltre tenere presente che, passando da una funzione alla sua inversa, il dominio e l'insieme delle immagini si scambiano tra di loro, cioè quello che è il dominio della funzione diretta diventa l'insieme delle immagini della funzione inversa e viceversa. I grafici di una funzione e della sua inversa, infine, risultano simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$, cioè se un punto (x, y) appartiene al grafico di una funzione, il punto (y, x) appartiene al grafico della funzione inversa.

Esempio 2.19 *Data la funzione:*

$$f(x) = 2x + 3$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi è iniettiva (infatti ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in un solo punto) e perciò è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. La funzione inversa si ottiene considerando:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

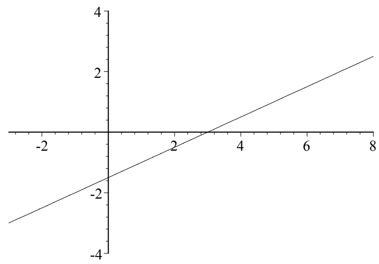
ed è data da:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

In pratica, poi, anche nella funzione inversa si continua ad indicare con x la variabile indipendente e con y la variabile dipendente, per cui si scrive:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio D ed insieme delle immagini I delle due funzioni, infine, si ha:

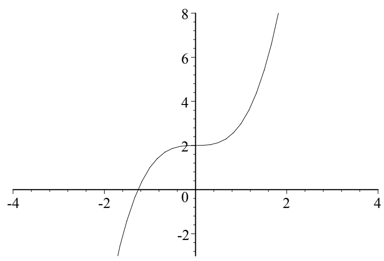
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
funzione inversa f^{-1}	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 2.20 *Data la funzione:*

$$f(x) = x^3 + 2$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



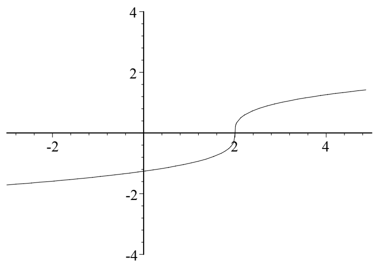
da cui risulta evidente che $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi è iniettiva ed invertibile su tutto $\mathbb{R}$. La funzione inversa si ottiene considerando:

$$y = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2}$$

ed è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni, infine, si ha:

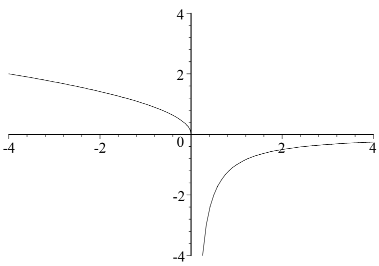
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
funzione inversa f^{-1}	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 2.21 *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & se \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



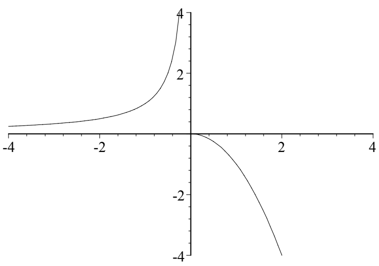
da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$ (infatti è strettamente monotona decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0]$ e strettamente monotona crescente sull'intervallo $(0,+\infty)$ ma non è monotona su $\mathbb{R}$ nel suo insieme), tuttavia è iniettiva e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (in effetti in questo caso la funzione non è continua – in particolare ha una discontinuità nell'origine – per cui, come indicato prima, la stretta monotonia è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'invertibilità). La funzione inversa si ottiene considerando:

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x} \quad \text{se } x \leq 0 \Rightarrow x = -y^2 \quad \text{se } y \geq 0 \\ \\ y = -\dfrac{1}{x} \quad \text{se } x > 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{y} \quad \text{se } y < 0 \end{cases}$$

(dove i valori assunti dalla y in ciascuno dei due tratti della funzione inversa possono essere determinati osservando i valori assunti dalla medesima variabile nella corrispondente parte di grafico della funzione diretta) ed è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ -x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni, infine, si ha:

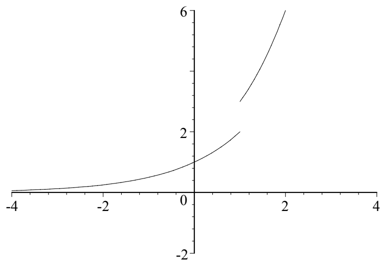
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
funzione inversa f^{-1}	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 2.22 *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & se \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & se \quad x > 1 \end{cases}$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che $f(x)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, quindi è iniettiva ed invertibile su $\mathbb{R}$. La funzione inversa si ottiene considerando:

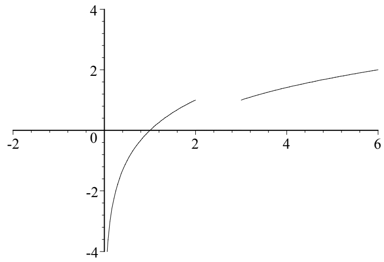
$$\begin{cases} y = 2^x \quad \text{se } x \leq 1 \Rightarrow x = \log_2 y \quad \text{se } 0 < y \leq 2 \\ y = x^2 + 2 \quad \text{se } x > 1 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt{y-2} \quad \text{se } y > 3 \end{cases}$$

ed è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_2 x & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

In particolare si può osservare che il secondo tratto della funzione inversa (cioè $\sqrt{x-2}$) è definito per $x > 3$ (e non per $x \geq 2$ come sembrerebbe sulla base della condizione di realtà della radice) in quanto il tratto corrispondente della funzione diretta (cioè $y = x^2 + 2$ per $x > 1$) ha come immagine l'intervallo $(3, +\infty)$ (che quindi diventa il dominio della corrispondente parte di funzione inversa), come si può dedurre osservando il grafico della funzione di partenza.

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni, infine, si ha:

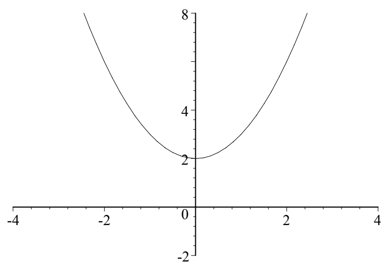
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = (0, 2] \cup (3, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = (0, 2] \cup (3, +\infty)$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 2.23 *Data la funzione:*

$$f(x) = x^2 + 2$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$ (infatti vi sono rette parallele all'asse delle ascisse che intersecano il grafico della funzione in due punti), quindi non è invertibile. La funzione diventa però iniettiva (e quindi invertibile) considerando separatamente gli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. Le corrispondenti funzioni inverse (cioè le inverse delle restrizioni di f a ciascuno dei due intervalli su cui f è iniettiva) si ottengono considerando:

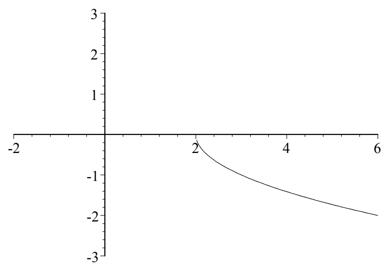
$$\text{su } (-\infty, 0] \qquad y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = -\sqrt{y-2} \quad \text{se } y \geq 2$$

$$\text{su } [0, +\infty) \qquad y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = +\sqrt{y-2} \quad \text{se } y \geq 2$$

A questo proposito si deve osservare che sul primo dei due intervalli l'espressione corretta da utilizzare è $-\sqrt{y-2}$ in quanto i valori corrispondenti della x sono negativi (infatti l'intervallo sul quale si sta effettuando il calcolo della funzione inversa è $(-\infty, 0]$) e tali valori si ottengono considerando appunto la radice quadrata di $y-2$ preceduta dal segno negativo; sul secondo dei due intervalli, invece, l'espressione corretta da utilizzare è $+\sqrt{y-2}$ in quanto i valori corrispondenti della x sono positivi (infatti l'intervallo sul quale si sta effettuando il calcolo della funzione inversa è $[0, +\infty)$) e tali valori si ottengono considerando la radice quadrata di $y - 2$ preceduta però dal segno positivo. Si ha allora che la funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0]$ è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2} \qquad \text{se } x \geq 2$$

il suo grafico è:



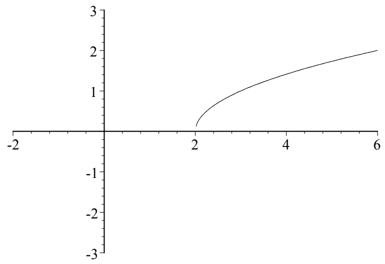
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = (-\infty, 0]$	$I = [2, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [2, +\infty)$	$I = (-\infty, 0]$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty)$ invece è data da:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} \qquad \text{se } x \geq 2$$

il suo grafico è:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

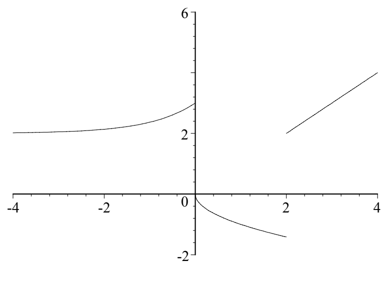
funzione diretta f	$D = [0, +\infty)$	$I = [2, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [2, +\infty)$	$I = [0, +\infty)$

Esempio 2.24 *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & se \quad x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & se \quad 0 < x < 2 \\ x & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi non è invertibile. La funzione diventa però iniettiva (e quindi invertibile) considerando separatamente gli intervalli $(-\infty, 0]$, $(0, 2)$ e $[2, +\infty)$. Le corrispondenti funzioni inverse (cioè le inverse delle restrizioni di f a ciascuno dei tre intervalli su cui f è iniettiva) si ottengono considerando:

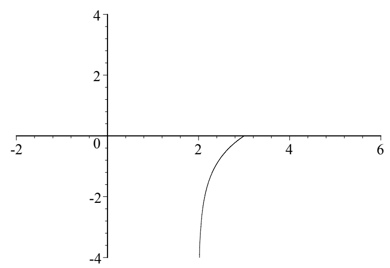
$$\begin{array}{ll} \text{su } (-\infty, 0] & y = e^x + 2 \Rightarrow x = \log(y-2) \quad \text{se } 2 < y \leq 3 \\ \text{su } (0, 2) & y = -\sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \quad \text{se } -\sqrt{2} < y < 0 \\ \text{su } [2, +\infty) & y = x \Rightarrow x = y \quad \text{se } y \geq 2 \end{array}$$

A questo proposito occorre tenere presente che gli intervalli di definizione di ciascuna di queste funzioni inverse si determinano osservando sul grafico le immagini delle corrispondenti restrizioni della funzione diretta (che appunto diventano i domini delle inverse, poiché dominio ed insieme delle immagini si scambiano passando da una funzione alla sua inversa).

Si ha allora che la funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0]$ è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \log(x-2) \quad \text{se } 2 < x \leq 3$$

il suo grafico è:



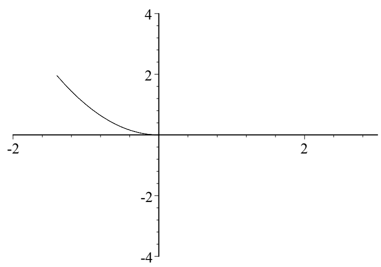
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

$$\begin{array}{lll} \text{funzione diretta } f & D = (-\infty, 0] & I = (2, 3] \\ \text{funzione inversa } f^{-1} & D = (2, 3] & I = (-\infty, 0] \end{array}$$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(0, 2)$ invece è data da:

$$f^{-1}(x) = x^2 \quad \text{se } -\sqrt{2} < x < 0$$

il suo grafico è:



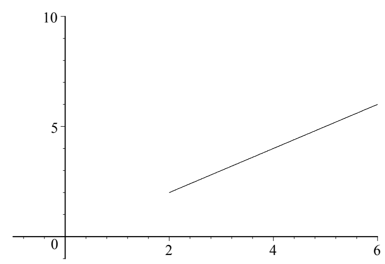
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = (0, 2)$	$I = (-\sqrt{2}, 0)$
funzione inversa f^{-1}	$D = (-\sqrt{2}, 0)$	$I = (0, 2)$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $[2, +\infty)$ infine è data da:

$$f^{-1}(x) = x \quad \text{se } x \geq 2$$

il suo grafico è:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = [2, +\infty)$	$I = [2, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [2, +\infty)$	$I = [2, +\infty)$

2.8. Esercizi da svolgere

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \log\sqrt{x^2-3}$

2) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$

3) $f(x) = \log\sqrt{x^2+3}$

4) $f(x) = (3x)^{\sqrt{x^2-4}}$

5) $f(x) = \sqrt{\log(x^2-3)}$

6) $f(x) = \dfrac{\log\sqrt{x^2-3}}{|x^2-4|}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\log\sqrt{x^2+1}}$

8) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x\right)^{\log(-x)}$

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\log(x+3)}$

10) $f(x) = (4x)^{\sqrt{2-x}}$

Determinare intersezioni con gli assi e segno delle seguenti funzioni:

11) $f(x) = x(\log x - 3)^2$

12) $f(x) = e^{\frac{2-x}{1-x}}$

13) $f(x) = \dfrac{|\ x^2-4\ |}{e^x}$

14) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+2}$

15) $f(x) = 3\dfrac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| + 1}$

Determinare se le seguenti funzioni presentano simmetrie o periodicità:

16) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x^3}$

17) $f(x) = \cos 2x$

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x^5}}{|x|}$

19) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x^4}$

20) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - x}}{x}$

Date le funzioni f e g, determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$:

21) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} \qquad g(t) = t^3 + 1$

22) $f(x) = x^3 + 1 \qquad g(t) = \sqrt[3]{t + 1}$

23) $f(x) = \log x \qquad g(t) = e^{t+3}$

24) $f(t) = \log t \qquad g(x) = |x - 2|$

25) $f(t) = \log(t + 1) \qquad g(x) = e^x$

Date le seguenti funzioni, determinare le corrispondenti funzioni inverse:

26) $f(x) = x^3 + 3$

27) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

28) $f(x) = \log |x|$

29) $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se} \quad x < 1 \\ \\ \log x^3 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

30) $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se} \quad x \leq -3 \\ \\ x + 3 & \text{se} \quad -3 < x < 3 \\ \\ \log x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Capitolo 3

Limiti e continuità

3.1. Definizioni e algebra estesa dei limiti

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato x_0 punto di accumulazione per X, si dice che f ammette limite l per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se in corrispondenza di ogni intorno di l di raggio ε, $U_\varepsilon(l)$, esiste un intorno di x_0 di raggio δ, $U_\delta(x_0)$, tale che per ogni x (diverso da x_0) appartenente all'intorno di x_0 (e al dominio di f) il corrispondente valore della funzione appartiene all'intorno di l; si ha quindi:

$$\forall U_\varepsilon(l) \quad \exists U_\delta(x_0) \quad : \quad x \in U_\delta(x_0) \cap X \ , \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(l)$$

o anche, con una diversa scrittura:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Nella definizione data, sia il punto x_0 sia il valore l possono essere finiti oppure uguali a $\pm\infty$. Quella considerata, inoltre, è la definizione di limite completo, ma si possono introdurre in maniera del tutto analoga le definizioni di limite destro o sinistro (considerando rispettivamente un intorno destro o sinistro di x_0 e scrivendo $x \to x_0^+$ oppure $x \to x_0^-$) e di limite per eccesso o per difetto (considerando rispettivamente un intorno destro o sinistro di l e scrivendo l^+ oppure l^-).

In pratica, però, per il calcolo dei limiti non si ricorre alla definizione ma si usano innanzitutto una serie di regole che consentono di scomporre il limite di una funzione qualsiasi in differenti limiti, più semplici da calcolare. In particolare, se f e g sono due funzioni che ammettono entrambe limite per $x \to x_0$ (dove x_0 è un punto di accumulazione per entrambi gli insiemi di definizione delle due funzioni), valgono le seguenti uguaglianze:

$$(i) \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

questa uguaglianza perde significato se uno dei due limiti è $+\infty$ e l'altro è $-\infty$

$$(ii) \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

questa uguaglianza perde significato se uno dei due limiti è 0 e l'altro è $\pm\infty$

$$(iii) \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} \qquad \text{quando } \lim_{x\to x_0} f(x) = m \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty \qquad \text{quando } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0^{\pm}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^{\pm} \qquad \text{quando } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

$$(iv) \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

questa uguaglianza perde significato se entrambi i limiti sono 0 oppure $\pm\infty$

In base a queste uguaglianze è possibile affermare che il limite di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni è uguale, rispettivamente, alla somma, al prodotto e al rapporto dei limiti delle singole funzioni. Queste regole rimangono valide quando i limiti in questione, anziché essere dei numeri, sono uguali a $\pm\infty$ (con l'eccezione dei casi indicati, in cui le uguaglianze elencate perdono significato e danno vita alle cosiddette "forme di indecisione"), per cui diventa possibile introdurre un'"algebra estesa" dei limiti. Valgono infatti i seguenti risultati:

a) per la somma:

$$(+\infty) + a = +\infty + a = +\infty \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

$$(-\infty) + a = -\infty + a = -\infty \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

b) per il prodotto:

$$(+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$(-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$$

c) per il reciproco:

$$\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$

d) per il rapporto:

$$\frac{a}{0^\pm} = a \cdot \frac{1}{0^\pm} = a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = a \cdot \frac{1}{\pm\infty} = a \cdot 0^\pm = \begin{cases} 0^\pm & \text{se } a > 0 \\ \\ 0^\mp & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{0^\pm}{\pm\infty} = 0^\pm \cdot \frac{1}{\pm\infty} = (0^\pm) \cdot (0^\pm) = 0^+$$

$$\frac{0^\mp}{\pm\infty} = 0^\mp \cdot \frac{1}{\pm\infty} = (0^\mp) \cdot (0^\pm) = 0^-$$

$$\frac{\pm\infty}{0^\pm} = \pm\infty \cdot \frac{1}{0^\pm} = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$\frac{\mp\infty}{0^\pm} = \mp\infty \cdot \frac{1}{0^\pm} = (\mp\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty$$

Occorre tenere presente che, in tutte queste formule, ∞ non rappresenta un numero ma un simbolo; una scrittura quale $+\infty + \infty = +\infty$ non va quindi letta come "la somma di $+\infty$ e di $+\infty$ è uguale a $+\infty$" (appunto perché ∞ non è un numero!) ma come "la somma di due funzioni che tendono a $+\infty$ tende a $+\infty$". In modo analogo, la scrittura $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ non va letta come "1 diviso 0^+ è uguale a $+\infty$" (in quanto, algebricamente, la divisione per 0 non è possibile!) ma come "il reciproco di una funzione che tende a 0^+ tende a $+\infty$". Considerazioni analoghe valgono per tutte le altre formule riportate, che rappresentano quindi delle "abbreviazioni" di quella che è appunto un'"algebra estesa" dei limiti, e hanno senso solo tenendo presente la nozione di limite che sta alla loro base.

Una proprietà fondamentale, che consente di calcolare agevolmente i limiti nella maggioranza dei casi (senza dover ricorrere alla definizione), è poi quella delle funzioni continue, per le quali si ha (per definizione appunto di funzione continua):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

per cui diventa possibile calcolare i limiti considerando semplicemente l'andamento, al variare di x, delle funzioni elementari. Poiché le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione sono continue (sul loro dominio), per tutte queste funzioni (che costituiscono la grande maggioranza dei casi che si presentano) è possibile calcolare in questo modo i limiti, evitando appunto di ricorrere alla definizione.

Esempio 3.1 *Calcolare i seguenti limiti:*

1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x+5}{(3-x)^2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\cos x - 2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x-\sin x+3}{1-x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x-\sin x+3}{1-x}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-1}{e^{-x}}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x}$

Tutte queste funzioni, essendo ottenute a partire dalle funzioni elementari, sono continue sul loro dominio, per calcolare i limiti indicati è allora sufficiente sostituire alla x il valore a cui essa tende ed applicare, eventualmente, le regole dell'"algebra estesa" introdotta prima. Si ottiene così:

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{x+5}{(3-x)^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^2} = \frac{2+5}{(3-2)^2} = \frac{7}{1} = 7$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\cos x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-2)} = \frac{1-1}{\cos 0-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-\sin x+3}{1-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-\sin x+3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)} = \frac{1-\sin 1+3}{1-1^+} = \frac{4-\sin 1}{0^-} = -\infty$$

4) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-\sin x+3}{1-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-\sin x+3)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)} = \frac{1-\sin 1+3}{1-1^-} = \frac{4-\sin 1}{0^+} = +\infty$$

5) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-1}{e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+2x-1)}{\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}} = \frac{+\infty+\infty-1}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

6) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x}{\lim\limits_{x\to 0^+} \log x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$$

Un altro risultato che, in alcuni casi, si utilizza nel calcolo dei limiti è poi il seguente:

Se f è limitata in un intorno di x_0 e se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

cioè il prodotto di una funzione limitata per una funzione che tende a 0*, a sua volta tende a* 0*.*

Questa proprietà viene applicata di solito in presenza di funzioni trigonometriche (in particolare seno e coseno, che godono della proprietà di essere limitate).

Esempio 3.2 *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \cos x$$

In questo caso e^x tende a 0 per $x \to -\infty$ mentre $\cos x$ è limitata in un intorno di $-\infty$ (infatti $|\cos x| \leq 1 \ \forall x$), si ha allora:

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \cos x = 0$$

Esempio 3.3 *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to +\infty} e^x \cos x$$

In questo caso $\cos x$ è limitata in un intorno di $+\infty$ ma e^x tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, per cui non è possibile applicare il risultato sopra riportato (in particolare si può dimostrare che il limite considerato non esiste).

3.2. Forme di indecisione

Le regole viste in precedenza per il calcolo dei limiti (limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto) non possono essere applicate in alcuni casi, che rappresentano le cosiddette "forme di indecisione". In queste situazioni, infatti, non è possibile conoscere a priori il risultato dell'operazione di limite che ha dato origine alla forma di indecisione, in quanto forme di indecisione dello stesso tipo possono dare vita a risultati diversi. Le forme di indecisione, in particolare, sono:

$$(+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0 \cdot \infty$$

$$\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}} = \frac{0^{\pm}}{0^{\mp}} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \frac{\pm\infty}{\mp\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Accanto a queste, che vengono definite "aritmetiche", sono inoltre presenti forme di indecisione "esponenziali", date da:

$$1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Queste ultime, in realtà, possono essere agevolmente ricondotte alle precedenti (in particolare alla forma $0 \cdot \infty$) tenendo presente che esse nascono dal calcolo di limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, per le quali è sempre possibile utilizzare la seguente trasformazione:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$$

per cui le forme di indecisione esponenziali diventano:

$$1^{\infty} \Rightarrow e^{\infty \cdot \log 1} = e^{\infty \cdot 0}$$

$$0^0 \Rightarrow e^{0 \cdot \log 0} = e^{0 \cdot \infty}$$

$$\infty^0 \Rightarrow e^{0 \cdot \log \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

e vengono quindi ricondotte tutte alla forma di indecisione aritmetica $0 \cdot \infty$.

A questo punto diventa importante individuare delle tecniche che consentano di risolvere i limiti in presenza delle forme di indecisione; in particolare, è possibile distinguere i seguenti metodi:

- manipolazioni algebriche
- infinitesimi ed infiniti (principio di eliminazione dei termini trascurabili)
- limiti notevoli
- regola di de l'Hospital
- formula di Taylor-Mac Laurin

3.3. Calcolo di limiti: manipolazioni algebriche

Un primo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dal ricorso a manipolazioni algebriche. In genere, esse consistono in scomposizioni di polinomi, razionalizzazioni, utilizzo delle proprietà delle potenze, utilizzo delle proprietà dei logaritmi, che in alcuni casi consentono di superare la forma di indecisione presente inizialmente nel calcolo di un limite.

Esempio 3.4 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può allora scrivere (scomponendo il denominatore della frazione e semplificando):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}-\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x\to 3}-\frac{1}{x+3} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Esempio 3.5 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$, si può allora scrivere (moltiplicando e dividendo per una stessa quantità e sfruttando il prodotto notevole):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3}}= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3}}= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3}}=0\end{aligned}$$

Esempio 3.6 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$, si può allora scrivere (moltiplicando e dividendo per una stessa quantità e sfruttando il prodotto notevole):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

A questo punto si ha la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$, è allora possibile mettere in evidenza sia al numeratore sia al denominatore della frazione la potenza di grado massimo (una tecnica questa che viene utilizzata spesso quando si ha a che fare con una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e ci si trova in presenza di potenze della x sia a numeratore sia a denominatore), ottenendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

In questo caso si può notare che il termine x^2 portato fuori dal segno di radice quadrata dovrebbe essere scritto nella forma $|x|$, ma poiché il limite è calcolato per $x\to+\infty$ questo significa che si stanno considerando valori della x sicuramente positivi, per cui $|x|=x$.

Esempio 3.7 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(x^2-1)-\log(x-1)\right]$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$, si può allora scrivere (sfruttando una proprietà dei logaritmi):

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(x^2-1)-\log(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}=+\infty$$

3.4. Calcolo di limiti: infinitesimi ed infiniti

Un secondo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dal "principio di eliminazione dei termini trascurabili", applicabile quando la forma di indecisione nasce in presenza di somme di infinitesimi oppure di infiniti (in particolare, in presenza di somme di potenze). A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per X, si ha innanzitutto:

$$f \text{è infinitesima per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$$f \text{è infinita per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

cioè una funzione si dice infinitesima (per $x \to x_0$) se tende a 0, mentre si dice infinita (per $x \to x_0$) se tende a $\pm\infty$. Gli infinitesimi e gli infiniti, poi, sono caratterizzati da un determinato ordine (un numero), che indica la velocità con la quale essi tendono rispettivamente a 0 oppure ad ∞ (ad ordine maggiore corrisponde una maggiore velocità di convergenza a 0 – nel caso di infinitesimi – oppure ad ∞ – nel caso di infiniti –). In particolare, considerando le funzioni potenza $f(x) = kx^\alpha$ con $k \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ esse sono infinitesime per $x \to 0$ ed infinite per $x \to \pm\infty$, e il loro ordine è rappresentato dall'esponente α.

Con riferimento agli infinitesimi e agli infiniti vale la seguente regola, nota come "principio di eliminazione dei termini trascurabili", che può essere utilizzata nel calcolo di certi limiti:

Se f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ e g_j $(j = 1, 2, ..., m)$ sono funzioni infinitesime oppure infinite per $x \to x_0$, allora si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + ... + g_m(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_h(x)}{g_k(x)} \qquad \text{con} \quad \begin{matrix} 1 \le h \le n \\ 1 \le k \le m \end{matrix}$$

dove $f_h(x)$ e $g_k(x)$ rappresentano l'infinitesimo di ordine inferiore (nel caso di infinitesimi) oppure l'infinito di ordine superiore (nel caso di infiniti) fra quelli che compaiono nella somma rispettivamente a numeratore e a denominatore della frazione.

Questo risultato autorizza quindi a trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (nel calcolo del limite di un rapporto tra somme di infinitesimi) e gli infiniti di ordine inferiore (nel calcolo del limite di un rapporto tra somme di infiniti).

Questo criterio è di immediata applicazione nel caso di somme di potenze (per le quali ad esponenti maggiori corrispondono infinitesimi – per $x \to 0$ – o infiniti – per $x \to \pm\infty$ – di ordine superiore); in questo caso infatti è sufficiente considerare, sia a numeratore sia a denominatore, la potenza minore (nel caso di infinitesimi) oppure la potenza maggiore (nel caso di infiniti), tralasciando tutte le altre.

Esempio 3.8 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt[3]{x}+4x^3}{2x^2+\sqrt{x}+3x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infinitesimi è possibile trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (e quindi considerare solo le potenze di grado minore), ottenendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt[3]{x}+4x^3}{2x^2+\sqrt{x}+3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x)^{\frac{1}{3}}}{(x)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x)^{\frac{1}{6}}} = +\infty$$

Esempio 3.9 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+2x^3-6\sqrt{x}}{x^3+2x-3\sqrt{x}}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infinitesimi è possibile trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (e quindi considerare solo le potenze di grado minore), ottenendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+2x^3-6\sqrt{x}}{x^3+2x-3\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-6\sqrt{x}}{-3\sqrt{x}} = 2$$

Esempio 3.10 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}+x}{3+\sqrt{x^3}+3x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infiniti (in particolare il valore 3 a denominatore può essere considerato un infinito di ordine 0) è possibile trascurare gli infiniti di ordine inferiore (e quindi considerare solo le potenze di grado maggiore), ottenendo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}+x}{3+\sqrt{x^3}+3x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} = 0^+$$

Esempio 3.11 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + 3x^2 - \sqrt[3]{x}$$

Il limite si presenta nella forma $-\infty + \infty$, e anche se non ci si trova in presenza di una frazione si tratta comunque di una somma di infiniti, per cui può essere applicato anche in questo caso il principio di eliminazione dei termini trascurabili per eliminare la forma di indecisione. In particolare, poiché l'espressione considerata è una somma di infiniti, è possibile trascurare gli infiniti di ordine inferiore (e quindi considerare solo la potenza di grado maggiore, che determina l'andamento della funzione per $x \to -\infty$), ottenendo:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + 3x^2 - \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$$

3.5. Calcolo di limiti: limiti notevoli

Un terzo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dall'applicazione dei cosiddetti "limiti notevoli", per cui si cerca di ricondurre il calcolo di limiti complessi a quello di altri limiti il cui valore è noto. Valgono in particolare i seguenti limiti notevoli:

(i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad \text{in particolare } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(iv) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \qquad \text{in particolare } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(v) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

(vi) $$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \text{in particolare } \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Diventa così possibile, almeno in certi casi, risolvere le forme di indecisione presenti inizialmente.

Esempio 3.12 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{x^3}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (*iii*) osservando che si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-e^x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{e^x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = -1\end{aligned}$$

Esempio 3.13 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(1+x)+x}{x - 4\sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, è però possibile sfruttare i limiti notevoli (*i*) e (*iv*) osservando che si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3\log(1+x)+x}{x-4\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3\log(1+x)+x}{x}}{\dfrac{x-4\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\dfrac{\log(1+x)}{x}+1}{1-4\dfrac{\sin x}{x}} = \\ &= \frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}+1}{1-4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{3\cdot 1+1}{1-4\cdot 1} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Esempio 3.14 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{3x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (*v*) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Esempio 3.15 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x$$

Il limite presenta innanzitutto, nella base, la forma $\frac{\infty}{\infty}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (vi) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right]^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^3} = \frac{1}{e^2}$$

I limiti notevoli visti si applicano anche in casi più generali, quando al posto di x si ha una funzione $f(x)$ che si comporta allo stesso modo della variabile x nelle espressioni prima esaminate. In questo caso, attraverso opportuni cambiamenti di variabile, diventa possibile ricondursi ai limiti notevoli fondamentali.

Esempio 3.16 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, inoltre non rientra in nessuno dei limiti notevoli sopra presentati, è però possibile effettuare innanzitutto la seguente trasformazione (dividendo numeratore e denominatore per $3\sqrt{x}$):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin 3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}}{\frac{\sin\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}}$$

A questo punto il limite che compare a numeratore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $3\sqrt{x}=t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x\to0^+$ anche $t\to0^+$):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (i)), mentre il limite che compare a denominatore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $\sqrt{x} = t$, per cui si ottiene:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{3t} = \frac{1}{3}$$

(calcolato sfruttando nuovamente il limite notevole (i)). In conclusione, il limite cercato è:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}}{\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Esempio 3.17 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x}{x \sin \frac{1}{x}}$$

Il limite può innanzitutto essere scritto nella forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x}{x \sin \frac{1}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)}$$

dopodiché il limite a numeratore si presenta nella forma 1^∞ mentre il limite a denominatore si presenta nella forma $0 \cdot \infty$. Il limite a numeratore può però essere scritto come:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^x = e^{-3}$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (vi)), mentre il limite a denominatore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $\frac{1}{x} = t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x \to +\infty$ allora $t \to 0^+$):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t} \sin t\right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (i)). In conclusione, il limite cercato è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x}{x\sin\dfrac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{e^{-3}}{1}=e^{-3}$$

3.6. Calcolo di limiti: regola di de l'Hospital

Un quarto metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dall'applicazione della regola di de l'Hospital, che consente di superare forme di indecisione del tipo $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$. Per l'applicazione di questa regola è però necessario l'uso del concetto di derivata di una funzione, che verrà introdotto nel prossimo Capitolo; si rinvia quindi a tale Capitolo per l'illustrazione delle regole utilizzate per il calcolo della derivata di una funzione.

Con riferimento alla regola di de l'Hospital vale il seguente risultato:

Se f e g sono due funzioni definite e derivabili in un intorno del punto x_0, infinitesime oppure infinite per $x \to x_0$, e se $g'(x) \neq 0$ nell'intorno di x_0 (escluso al più il punto x_0 stesso), allora se esiste (finito o infinito) il limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si ha:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In pratica, questa regola consente di sostituire al calcolo del limite del rapporto di due funzioni il calcolo del limite del rapporto delle loro derivate; se quest'ultimo limite esiste, allora è anche uguale al limite iniziale, se invece non esiste non è detto che il limite iniziale non esista (in quanto quella espressa dalla regola di de l'Hospital è una condizione sufficiente – ma non necessaria – per l'esistenza del limite cercato). Qualora anche il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni si presenti in una delle forme $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, poi, diventa possibile (se sono soddisfatte le ipotesi richieste per l'applicazione di questa regola) applicare nuovamente (e anche più volte) la regola di de l'Hospital, fino a giungere alla risoluzione della forma di indecisione.

Esempio 3.18 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}$$

Il limite (che è già stato risolto nell'Esempio 3.4) si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può però applicare la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}\overset{H}{=}\lim_{x\to 3}\frac{D(3-x)}{D(x^2-9)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{6}$$

che è il limite cercato (ed è uguale al valore ottenuto in precedenza servendosi delle manipolazioni algebriche).

Esempio 3.19 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2e^x}{x^3}$$

Il limite (che è già stato risolto nell'Esempio 3.12) si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può però applicare la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2e^x}{x^3}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{D(x^2-x^2e^x)}{D(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x^2e^x-2xe^x}{3x^2}$$

Anche questo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, è però possibile applicare nuovamente la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-x^2e^x-2xe^x}{3x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{D(2x-x^2e^x-2xe^x)}{D(3x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2e^x-4xe^x-2e^x}{6x}$$

Anche questo nuovo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando una terza volta la regola di de l'Hospital si riesce però a risolvere l'indecisione, infatti si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2e^x-4xe^x-2e^x}{6x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{D(2-x^2e^x-4xe^x-2e^x)}{D(6x)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^2e^x-2xe^x-4xe^x-4e^x-2e^x}{6}=-1$$

che è il limite cercato (ed è uguale al valore ottenuto in precedenza servendosi dei limiti notevoli).

Esempio 3.20 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^3}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, applicando la regola di de l'Hospital 3 volte si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{D(e^x-1)}{D(x^3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{D(e^x)}{D(3x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{H}{=}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{D(e^x)}{D(6x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

Esempio 3.21 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+} x\log x$$

Il limite si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, per applicare la regola di de l'Hospital occorre innanzitutto riscriverlo come:

$$\lim_{x\to0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}$$

che si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, a questo punto si ha:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{D(\log x)}{D\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0^-$$

Esempio 3.22 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x$$

Il limite si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, per applicare la regola di de l'Hospital occorre innanzitutto riscriverlo come:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

che si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, a questo punto si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{D(x)}{D(e^{-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0^-$$

Esempio 3.23 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+}x^x$$

Il limite si presenta nella forma esponenziale 0^0, occorre allora innanzitutto effettuare la trasformazione:

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\log x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\log x}$$

Il limite ad esponente si presenta nella forma $0\cdot\infty$ ed è stato calcolato in precedenza (è uguale a 0), si ha quindi:

$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1$$

3.7. Calcolo di limiti: formula di Taylor-Mac Laurin

Un quinto metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione (in particolare quelle del tipo $\dfrac{0}{0}$) è costituito dall'applicazione della formula di Taylor-Mac Laurin. Tale formula verrà introdotta in forma estesa nel prossimo Capitolo (al quale quindi si rinvia per una illustrazione completa), mentre qui viene presentato il suo utilizzo nel calcolo di alcuni limiti, che generano forme di indecisione.

In generale, la formula di Taylor centrata in x_0 e arrestata all'ordine n (con resto di Peano) consente di approssimare una funzione, in un intorno del punto x_0, mediante un polinomio di grado n, commettendo in questo modo un errore che risulta essere un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$ (cioè un errore che tende a 0 più rapidamente di $(x-x_0)^n$); se $x_0=0$, poi, la formula prende il nome di formula di Mac Laurin.

A questo proposito, per il calcolo di certi limiti risultano di fondamentale importanza i seguenti sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

In tutti questi sviluppi compare il simbolo o ("o piccolo"); con riferimento a tale simbolo occorre tenere presente che la scrittura:

$$f = o(g) \qquad \text{per } x \to x_0$$

(che si legge "f è o piccolo di g per x che tende a x_0") equivale a:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e in questo caso si dice anche che f è trascurabile rispetto a g, per $x \to x_0$ (in quanto l'idea sottostante è che, per $x \to x_0$, f tende a 0 più rapidamente di g). Il simbolo o, inoltre, soddisfa le seguenti proprietà:

$$o(c \cdot g) = o(g) \qquad \forall c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$$

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

le quali risultano particolarmente utili proprio nell'utilizzo della formula di Taylor-Mac Laurin per il calcolo di certi limiti (in particolare, l'ultima proprietà indica che la somma algebrica di due quantità trascurabili rispetto ad una certa funzione g è ancora una quantità trascurabile rispetto a questa funzione, e non è possibile una semplificazione del tipo $o(g) - o(g) = 0$).

Con riferimento all'utilizzo degli sviluppi prima introdotti per la risoluzione delle forme di indecisione, il problema fondamentale è costituito dall'ordine dello sviluppo al quale è opportuno arrestarsi. A questo proposito, si deve tenere presente che l'unica regola da seguire è quella in base alla quale occorre arrestarsi quando diventa possibile eliminare la forma di indecisione, in quanto se ci si arresta troppo presto la forma di indecisione permane, mentre se si continua lo sviluppo introducendo termini in eccesso rispetto a quelli che consentono di superare la forma di indecisione si compie uno sforzo inutile (poiché questi termini, essendo infinitesimi di ordine superiore, verranno poi tralasciati nel calcolo).

Esempio 3.24 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, applicando lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione e^x e arrestandosi al primo ordine si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x+o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}$$

e non si conosce il risultato di questo limite (in quanto $o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad x per $x\to 0$, per cui si avrebbe $\lim_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}=0$, ma non si può dire niente del suo comportamento rispetto a x^2). Applicando invece lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al secondo ordine si ottiene (tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore, che sono incorporati nel termine $o(x^2)$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

e quindi si risolve la forma di indecisione. Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al terzo ordine, per cui si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

da cui risulta evidente che il fatto di proseguire lo sviluppo al di là dell'ordine che consente di superare la forma di indecisione costituisce uno sforzo inutile (in quanto i termini di ordine più elevato, essendo infinitesimi di ordine superiore, vengono trascurati e quindi non contribuiscono al calcolo del limite).

Esempio 3.25 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[(1+x)^2-1\right]}{x-\sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando lo sviluppo di Mac Laurin alle funzioni $(1+x)^\alpha$ (con $\alpha = 2$) e $\sin x$ si ottiene (arrestando lo sviluppo di $(1+x)^2$ al primo ordine e quello di $\sin x$ al terzo ordine e sfruttando le proprietà del simbolo o viste prima):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[(1+x)^2-1\right]}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[1+2x+o(x)-1\right]}{x-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 12$$

In modo del tutto analogo a quanto è stato visto con riferimento ai limiti notevoli, gli sviluppi di Taylor-Mac Laurin si applicano anche a funzioni più generali di quelle prima considerate, ottenute per composizioni di funzioni infinitesime. In questo caso, attraverso opportuni cambiamenti di variabile diventa possibile ricondursi agli sviluppi di Taylor-Mac Laurin fondamentali.

Esempio 3.26 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}{x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, prima di applicare lo sviluppo di Mac Laurin conviene in questo caso effettuare il cambiamento di variabile $\sqrt[3]{x} = t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x \to 0$ anche $t \to 0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t^3}$$

e poi, applicando lo sviluppo di Mac Laurin a $\sin t$ (arrestato al terzo ordine):

$$\lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t-t+\frac{t^3}{3!}+o(t^3)}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{6}t^3}{t^3} = \frac{1}{6}$$

Esempio 3.27 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\sin x}-1}{x^2 \sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando innanzitutto lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione $\sin x$ (arrestato al terzo ordine al numeratore e al primo ordine al denominatore) si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\sin x}-1}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}-1}{x^2(x+o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{6}x^3}-1}{x^3+o(x^3)}$$

A questo punto si può effettuare il cambiamento di variabile $\frac{1}{6}x^3 = t$ (tenendo presente che se $x \to 0$ anche $t \to 0$) e applicare poi lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione esponenziale, ottenendo così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{6}x^3}-1}{x^3+o(x^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{6t+o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1+t+o(t)-1}{6t+o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{6t} = \frac{1}{6}$$

3.8. Asintoti

Un altro argomento legato al calcolo di limiti è costituito dalla ricerca degli asintoti di una funzione. In effetti, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il calcolo dei limiti in corrispondenza degli estremi del campo di esistenza consente di individuare la presenza di eventuali asintoti. Per questo motivo, procedendo nello studio di una funzione, dopo l'analisi del dominio, delle intersezioni con gli assi, del segno e di eventuali simmetrie (come visto nel Capitolo precedente) si passa al calcolo dei limiti agli estremi del dominio.

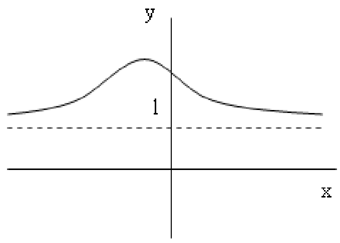
Con riferimento alla ricerca degli asintoti si hanno i seguenti risultati:

- Se vale:

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x) = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

allora $f(x)$ ammette come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = l$.

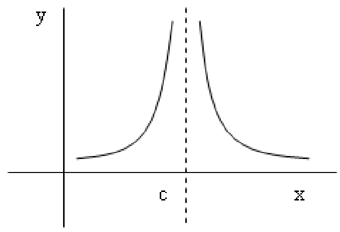
Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- Se vale:

$$\lim_{x\to c^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad \text{con } c \text{ punto di accumulazione per } X$$

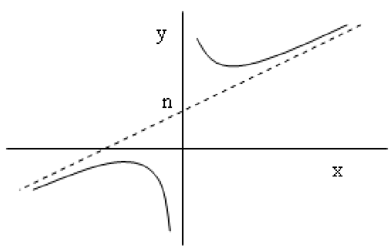
allora $f(x)$ ammette come asintoto verticale la retta di equazione $x = c$. Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- Se vale:

$$\lim_{x\to\mp\infty} [f(x) - mx - n] = 0$$

allora $f(x)$ ammette come asintoto obliquo la retta di equazione $y = mx + n$. Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



e quest'ultimo caso equivale all'esistenza dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (\text{con } m \text{ finito e} \neq 0)$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} [f(x) - mx] = n \quad (\text{con } n \text{ finito})$$

Se i limiti sopra elencati valgono solo per $x \to -\infty$ o per $x \to c^-$ si parla di asintoto (orizzontale, verticale, obliquo) sinistro, se valgono solo per $x \to +\infty$ o per $x \to c^+$ si parla di asintoto (orizzontale, verticale, obliquo) destro. Si può inoltre osservare che l'asintoto orizzontale e quello obliquo si escludono a vicenda (quindi non possono essere presenti contemporaneamente), mentre l'asintoto verticale è compatibile sia con quello orizzontale sia con quello obliquo.

Esempio 3.28 *Individuare eventuali asintoti della funzione:*

$$f(x) = \frac{5}{x-3}$$

Si ha innanzitutto che il dominio della funzione è dato da:

$$D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

per cui i limiti da calcolare sono quelli per $x \to \mp\infty$ e per $x \to 3$ (infatti i limiti di una funzione vanno calcolati in corrispondenza degli estremi del suo dominio, per cui l'individuazione di quest'ultimo è importante anche per capire quali sono i limiti da determinare). Si ha poi:

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{5}{x-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 3^\mp} \frac{5}{x-3} = \mp\infty$$

da cui si deduce che $y = 0$ è un asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$ e anche per $x \to +\infty$), mentre $x = 3$ è un asintoto verticale.

Esempio 3.29 *Individuare eventuali asintoti della funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Si ha innanzitutto che il dominio della funzione è dato da:

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

per cui i limiti da calcolare sono quelli per $x \to \mp\infty$ e per $x \to \mp 2$, a questo proposito si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Si può allora concludere che le rette $x = -2$ e $x = 2$ sono due asintoti verticali, non vi sono invece asintoti orizzontali, mentre per verificare la presenza di asintoti obliqui si considera:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = m$$

e poi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \to \mp\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4} - x \right] = \\ &= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 = n \end{aligned}$$

per cui la retta $y = x + 3$ è un asintoto obliquo per $x \to \mp\infty$.

3.9. Funzioni continue

Un ultimo utilizzo dei limiti è quello legato alla nozione di continuità di una funzione. A questo proposito, una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X, se vale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

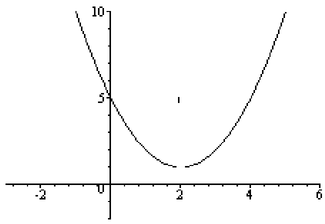
cioè il limite sinistro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ è uguale al limite destro, ed entrambi sono uguali al valore effettivamente assunto dalla funzione nel punto x_0.

Se f non è continua si dice che presenta una discontinuità in x_0, la quale può essere di 3 tipi:

- discontinuità eliminabile, se vale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

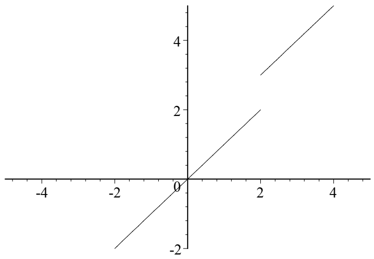
cioè il limite sinistro e il limite destro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ sono uguali, ma sono diversi dal valore assunto dalla funzione in x_0. Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- discontinuità di prima specie, se vale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \text{ed entrambi sono finiti}$$

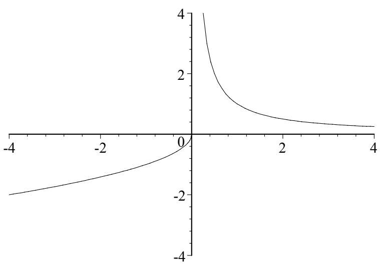
cioè il limite sinistro e il limite destro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ esistono finiti ma sono diversi tra di loro. In questo caso si parla anche di "salto", e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- discontinuità di seconda specie, se vale:

  almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ non esiste oppure vale $\pm\infty$

  Graficamente in questo caso si ha una situazione di questo tipo:



In pratica, con riferimento alle funzioni elementari (e a quelle da esse ottenute attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione) si sa che esse sono continue sul loro dominio. Il problema dell'esistenza di eventuali discontinuità può sorgere nel caso di funzioni definite a tratti, con riferimento ai punti in corrispondenza dei quali cambia l'espressione analitica della funzione. In questi punti è allora necessario studiare espressamente la continuità, applicando la definizione vista in precedenza.

Esempio 3.30 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x(x+3) & se\ x \leq 0 \\ \\ \log(1+\sqrt{x}) & se\ x > 0 \end{cases}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari, che sono continue sul loro dominio), per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre considerare:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x(x+3) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log(1+\sqrt{x}) = 0$$

$$f(0) = 0$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 0$.

Si deve osservare che, nel calcolo del limite sinistro e destro relativi al punto x_0 (in questo caso $x_0 = 0$), occorre prestare attenzione a quella che è l'espressione corretta della funzione da utilizzare. Nel caso in esame, per il calcolo del limite sinistro occorre utilizzare $x(x+3)$ perché questa è l'espressione di $f(x)$ per $x < 0$, mentre per il calcolo del limite destro occorre utilizzare $\log(1+\sqrt{x})$ perché questa è l'espressione di $f(x)$ per $x > 0$.

Esempio 3.31 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x}{2-x} + 1 & se\ 0 < x < 2 \\ \\ e^x & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua per $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Per verificare la continuità in $x = 0$ occorre considerare:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2-x} + 1 = 1$$

$$f(0) = 1$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 0$. Per verificare la continuità in $x = 2$, poi, occorre considerare:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{2-x} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^x = e^2$$

$$f(2) = e^2$$

da cui si deduce che $f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie in $x = 2$ (dove è continua solo da destra poiché si ha $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$).

Esempio 3.32 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha + 5x & \text{se } x < 1 \\ \\ x^2 + 6 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 1$, per verificare la continuità anche in $x = 1$ occorre considerare:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2\alpha + 5x = 2\alpha + 5$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + 6 = 7$$

$$f(1) = 7$$

e perché f sia continua anche in $x = 1$ si deve avere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè:

$$2\alpha + 5 = 7 \Rightarrow \alpha = 1$$

per cui si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 1$ se $\alpha = 1$.

Esempio 3.33 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x-1} & \textit{se } x < 1 \\ \\ \alpha \log x + \beta & \textit{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 1$, per verificare la continuità anche in $x = 1$ occorre considerare:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \alpha e^{x-1} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \alpha \log x + \beta = \beta$$

$$f(1) = \beta$$

e perché f sia continua anche in $x = 1$ si deve avere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè:

$$\alpha = \beta$$

per cui si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 1$ se $\alpha = \beta$.

3.10. Esercizi da svolgere

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2+5x}{x^3+2x+3}$

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5-x^4+2}{x^3-x^2+5}$

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2-5x}{x^3+6x^2}$

7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{4x^2+5x}}$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{2tgx}{x}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\,x}{\sin x}$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\log x}{x-1}$

11) $\lim_{x\to 0^+} x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

12) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x\log x}{x+\log x}$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos x)}{\sin x-\log(1+x)}$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$

15) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2}$

Determinare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) delle seguenti funzioni:

16) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

17) $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$

18) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

19) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x-1}$

20) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x+3}$

21) $f(x) = \sqrt{x^2-2} - x$

22) $f(x) = xe^{-\frac{2}{x}}$

23) $f(x) = e^{\frac{3-x}{1-x}}$

24) $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+3}$

25) $f(x) = \log \frac{x^2}{(x+2)^2}$

Discutere la continuità delle seguenti funzioni sul loro dominio:

26) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e}{2}\left(3 - x^2\right) & \text{se } x \le 1 \\ \\ e^{\frac{1}{x}} + \alpha & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

27) $$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha & \text{se } x \le 1 \\ \\ \log x + 1 + \beta & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

28) $$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha(x-1) & \text{se } x < 1 \\ \\ (x-1)^2 - 3(x-1) & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

29) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x-1} & \text{se } x \ne 1 \\ \\ x^{\alpha} & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

30) $$f(x) = \begin{cases} 2\alpha + 5x & \text{se } x < 1 \\ \\ \sqrt{x} + 3 & \text{se } 1 \le x \le 4 \\ \\ x^2 - 22\beta & \text{se } x > 4 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Capitolo 4

Calcolo differenziale

4.1. Definizioni e regole di derivazione

Un concetto di grande importanza per lo sviluppo del calcolo differenziale è quello di derivata. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un punto $x_0 \in I$, dove I è un intervallo contenuto in X, si definisce derivata di f in x_0 (e si indica con $f'(x_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto x_0, purché questo limite esista finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Con una diversa notazione, la stessa derivata può essere espressa come:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

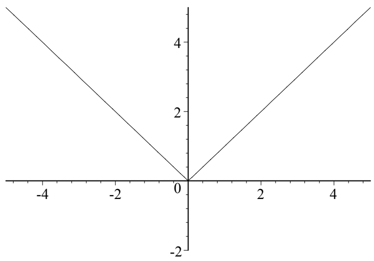
In modo analogo è possibile definire la derivata sinistra e quella destra di f in x_0 (indicate con $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$) come limite rispettivamente sinistro e destro del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto x_0, purché questo limite esista finito. La derivata (completa) di f in x_0 è allora il valore comune delle derivate sinistra e destra, cioè si ha $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Occorre tenere presente che se f è derivabile in x_0 (cioè se esiste la sua derivata in x_0) allora è anche continua in x_0, mentre non vale il viceversa (cioè una funzione può essere continua in un punto senza essere derivabile in quel punto). In particolare, se f è continua in x_0 ma non è derivabile in tale punto, si dice che in x_0 presenta:

- un punto angoloso se vale:

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

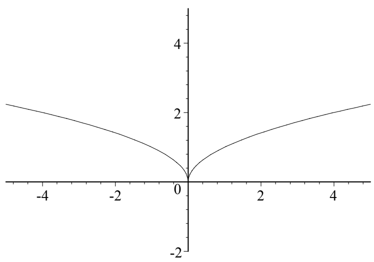
  e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



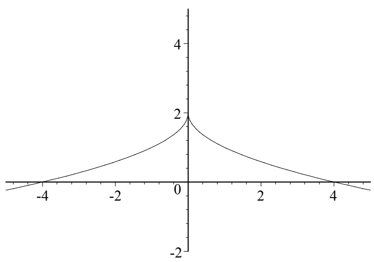
- un punto di cuspide se vale:

  $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono infiniti con segno differente (uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$)

  e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



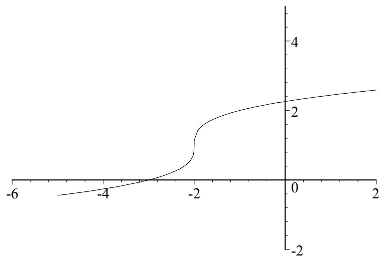
  oppure di questo tipo:



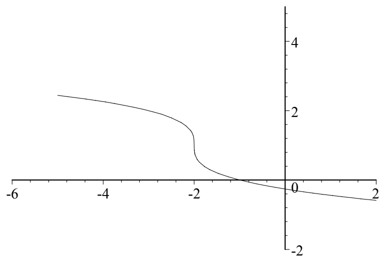
- un punto di flesso a tangente verticale se vale:

  $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono infiniti con lo stesso segno (entrambi $+\infty$ oppure $-\infty$)

  e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



  oppure di questo tipo:



In definitiva, per calcolare la derivata di una funzione ricorrendo alla definizione occorre procedere in due fasi: prima si calcola il rapporto incrementale e poi si calcola il limite di questo rapporto per $h \to 0$. In pratica, però, per il calcolo delle derivate non si ricorre alla definizione (in modo del tutto analogo a quanto accade per il calcolo dei limiti) e si usano invece una serie di regole che consentono di ricondurre il calcolo della derivata di una funzione qualsiasi a quello delle derivate delle funzioni elementari (che sono note).

A questo proposito è possibile innanzitutto introdurre le derivate delle funzioni elementari, che sono riassunte nella tabella seguente:

Funzione primitiva $f(x)$	Funzione derivata $f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a \quad \text{con } a > 0$
e^x	e^x
$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \log a} \quad \text{con } x \neq 0, a > 0$
$\log \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x} \quad \text{con } x \neq 0$
$\log \lvert f(x) \rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con } -1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con } -1 < x < 1$
$arctgx$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Si possono poi introdurre una serie di regole di derivazione; in particolare, se f e g sono due funzioni che ammettono entrambe derivata in un generico punto x, allora valgono le seguenti regole (dove con D si indica la derivata di una funzione):

(i) $D\,[f(x)+g(x)] = D\,[f(x)] + D\,[g(x)]$

(ii) $D\,[f(x)\cdot g(x)] = D\,[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot D\,[g(x)]$

in particolare se c è una costante si ha $D\,[c\cdot f(x)] = c\cdot D\,[f(x)]$

(iii) $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{D\,[f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot D\,[g(x)]}{[g(x)]^2}$ con $g(x)\neq 0$

Accanto a queste regole, che riguardano la derivata di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni, valgono inoltre le seguenti regole, relative alla derivata della funzione composta e alla derivata della funzione inversa:

(iv) Date le funzioni $y = f(t)$ e $t = g(x)$ tali da poter considerare la funzione composta $y = f\circ g = f(g(x))$, se g è derivabile in x e f è derivabile in $t = g(x)$, allora $f\circ g$ è derivabile in x e si ha:

$$D\,[f(g(x))] = D\,[f(t)]_{t=g(x)}\cdot D\,[g(x)]$$

(v) Data una funzione f continua e strettamente monotona, se f è derivabile in x_0 con $D\,[f(x)]_{x=x_0}\neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \frac{1}{D\,[f(x)]_{x=x_0}}$$

Con riferimento a quest'ultima regola, va osservato che essa consente di calcolare la derivata in un punto dell'inversa di una certa funzione senza dover calcolare l'inversa della funzione stessa (calcolo che in alcuni casi può non essere possibile). Se l'inversa può essere calcolata con facilità, tuttavia, può risultare più comodo, per il calcolo della derivata, ottenere prima la funzione inversa e poi derivarla, valutando tale derivata nel punto che interessa.

Esempio 4.1 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$f(x) = 5x\log x + x^4$$

Applicando le regole (i) e (ii) viste sopra si ha:

$$D\,[f(x)] = D\,(5x\log x) + D(x^4) = D\,(5x)\cdot\log x + 5x\cdot D(\log x) + D(x^4) =$$
$$= 5\log x + 5x\frac{1}{x} + 4x^3 = 5\log x + 5 + 4x^3$$

e quindi:

$$f'(x) = 4x^3 + 5\log x + 5$$

Esempio 4.2 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Applicando la regola (iii) vista sopra si ha:

$$\begin{aligned} D\left[\frac{e^x-1}{e^x+1}\right] &= \frac{D\left(e^x-1\right)\cdot\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\cdot D(e^x+1)}{\left(e^x+1\right)^2} = \\ &= \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^x(e^x+1-e^x+1)}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} \end{aligned}$$

e quindi:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Esempio 4.3 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = \sqrt{\log x}$$

La funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g$ dove f e g sono date da:

$$f(t) = \sqrt{t} \qquad t = g(x) = \log x$$

e applicando la regola (iv) vista sopra si ha:

$$\begin{aligned} D\left[f(g(x))\right] = D\left[f(t)\right]_{t=g(x)}\cdot D\left[g(x)\right] &= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)_{t=\log x}\cdot\frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}} \end{aligned}$$

e quindi:

$$z'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$$

In pratica, poi, si può evitare di effettuare tutti i passaggi intermedi osservando che essi equivalgono a derivare la funzione "esterna" valutando però la derivata in corrispondenza della funzione "interna", e a moltiplicare questo risultato per la derivata della funzione "interna". Nell'esempio considerato si ha allora direttamente:

$$z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$$

dove il termine $\frac{1}{2\sqrt{\log x}}$ rappresenta la derivata della funzione "esterna" (cioè di $\sqrt{()}$) valutata in corrispondenza della funzione "interna" (cioè di $\log x$), mentre il termine $\frac{1}{x}$ rappresenta la derivata della funzione "interna" (cioè di $\log x$).

Esempio 4.4 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$$

La funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g \circ h$ dove f, g e h sono date da:

$$f(t) = e^t \qquad t = g(z) = \sqrt{z} \qquad z = h(x) = \sin x$$

per cui applicando la regola (*iv*) vista sopra (che si estende al caso di più di due funzioni) si ha:

$$\begin{aligned} D\left[f(g(h(x)))\right] &= D\left[f(t)\right]_{t=g(h(x))} \cdot D\left[g(z)\right]_{z=h(x)} \cdot D\left[h(x)\right] = \\ &= \left(e^t\right)_{t=\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)_{z=\sin x} \cdot \cos x = \\ &= e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\right) \cdot \cos x = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}} \end{aligned}$$

e quindi:

$$z'(x) = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

Anche in questo caso è possibile evitare di effettuare tutti i passaggi intermedi osservando che la regola vista equivale a calcolare la derivata di ogni funzione che compare nella composizione (partendo da quella più esterna), valutandola in corrispondenza della funzione interna (o delle funzioni interne, se le composizioni sono multiple), e a moltiplicare tra di loro queste diverse derivate. Nell'esempio considerato si ha allora direttamente:

$$z'(x) = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

dove il termine $e^{\sqrt{\sin x}}$ rappresenta la derivata della funzione più esterna (cioè di $e^{()}$) valutata in corrispondenza delle funzioni interne (cioè di $\sqrt{\sin x}$), mentre il termine $\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}$ rappresenta la derivata della funzione intermedia (cioè di $\sqrt{()}$) valutata in corrispondenza della funzione più interna (cioè di $\sin x$), e il termine $\cos x$ rappresenta la derivata della funzione più interna (cioè di $\sin x$).

Esempio 4.5 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = x^x$$

In questo caso occorre innanzitutto riscrivere la funzione operando la trasformazione:

$$x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$$

dopodiché la derivata può essere calcolata applicando la regola (iv) vista sopra, tenendo presente che la funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g$ dove f e g sono date da:

$$f(t) = e^t \qquad t = g(x) = x \log x$$

per cui si ha (eventualmente tralasciando i passaggi intermedi):

$$\begin{aligned} D\left[f(g(x))\right] &= D\left[f(t)\right]_{t=g(x)} \cdot D\left[g(x)\right] = \left(e^t\right)_{t=x\log x} \cdot (1 + \log x) = \\ &= e^{x \log x}(1 + \log x) = x^x(1 + \log x) \end{aligned}$$

e quindi:

$$z'(x) = x^x(1 + \log x)$$

Esempio 4.6 *Data la funzione:*

$$f(x) = \sqrt{e^{x-2}}$$

calcolare la derivata della funzione inversa prima nel punto $y_0 = f(x_0)$ *con* $x_0 = 1$ *e poi nel punto* $y_0 = \sqrt{e}$.

Applicando la regola (v) vista sopra si sa che vale:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=x_0}}$$

Nel caso considerato si ha innanzitutto che la derivata della funzione $f(x)$ è data da:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{x-2}}} \cdot e^{x-2} = \frac{\sqrt{e^{x-2}}}{2}$$

A questo punto, per calcolare la derivata della funzione inversa in corrispondenza di $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 = 1$ si deve innanzitutto osservare che $y_0 = f(1) = \sqrt{e^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, dopodiché applicando la formula vista sopra si ottiene:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=1}} \Rightarrow D\left[f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right] = \frac{1}{\frac{\sqrt{e^{1-2}}}{2}} = 2\sqrt{e}$$

Per calcolare la derivata della funzione inversa in corrispondenza di $y_0 = \sqrt{e}$, invece, si deve osservare che $y_0 = \sqrt{e}$ corrisponde a $x_0 = 3$ (infatti $f(3) = \sqrt{e}$), dopodiché applicando di nuovo la formula vista sopra si ottiene:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=\sqrt{e}} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=3}} \Rightarrow D\left[f^{-1}\left(\sqrt{e}\right)\right] = \frac{1}{\frac{\sqrt{e^{3-2}}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Nel caso in esame la derivata della funzione inversa potrebbe anche essere calcolata ottenendo prima la funzione inversa stessa e poi derivandola. A questo proposito si ha:

$$\begin{aligned} &f(x) = \sqrt{e^{x-2}} \Rightarrow y = \sqrt{e^{x-2}} \Rightarrow y^2 = e^{x-2} \Rightarrow \log y^2 = x - 2 \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow x = f^{-1}(y) = 2 + 2\log y \end{aligned}$$

e la derivata di questa funzione è:

$$D\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{2}{y}$$

In particolare, poi, tale derivata valutata nel punto $y_0 = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ vale:

$$D\left[f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right] = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = 2\sqrt{e}$$

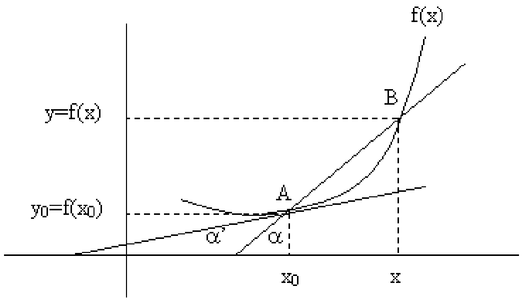
mentre la stessa derivata valutata nel punto $y_0 = \sqrt{e}$ vale:

$$D\left[f^{-1}\left(\sqrt{e}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

e questi sono esattamente i risultati ottenuti prima sfruttando la formula della derivata della funzione inversa.

4.2. Interpretazione geometrica della derivata

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per fornire un'interpretazione geometrica della derivata è possibile prendere in esame il grafico della funzione, dato ad esempio da:



L'equazione della retta passante per i punti $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x, y)$ è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dove m è il coefficiente angolare di tale retta, che può allora essere espresso come:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\alpha$$

cioè il coefficiente angolare della retta risulta essere la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta stessa forma con la direzione positiva dell'asse x. Quando $x \to x_0$ la retta passante per i punti A e B tende ad assumere una posizione limite, costituita dalla retta tangente alla funzione in corrispondenza del punto $A = (x_0, y_0)$, e il coefficiente angolare di questa retta tangente è dato da:

$$m' = tg\alpha' = \lim_{x \to x_0} m = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Si ha allora che la derivata della funzione f in corrispondenza del punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto (cioè rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo α' che la retta tangente forma con la direzione positiva dell'asse x) e indica la pendenza della funzione in x_0. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, infine, è:

$$y - f(x_0) = m'(x - x_0)$$

cioè:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

e anche:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Il termine $f'(x_0)(x - x_0)$ che compare nell'equazione della retta tangente prende il nome di differenziale della funzione f nel punto x_0, e nel caso di incremento infinitesimo della variabile indipendente x si indica con:

$$dy = f'(x_0)dx$$

Questa quantità rappresenta l'incremento della variabile dipendente (la y) quando la variabile indipendente (la x) varia di una piccola quantità, incremento misurato sulla retta tangente alla funzione in x_0. Per valori di x prossimi a x_0 tale incremento costituisce una buona approssimazione della variazione della y osservata sulla funzione f, infatti si può scrivere:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R$$

dove $f(x)-f(x_0)$ rappresenta appunto l'incremento subito dalla variabile dipendente a fronte di una variazione della variabile indipendente, incremento misurato sul grafico della funzione f, mentre $f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta l'analogo incremento misurato sulla retta tangente alla funzione in x_0 e R è una quantità trascurabile (per $x \to x_0$). Questa formula prende il nome di prima formula dell'incremento finito, e può anche essere scritta come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R \qquad \text{per } x \to x_0$$

da cui risulta che, vicino al punto x_0, la funzione $f(x)$ può essere espressa come somma della retta tangente alla funzione stessa nel punto x_0 e di una quantità trascurabile. Quando per una funzione $f(x)$ vale una rappresentazione di questo tipo (per cui, vicino al punto x_0, la funzione può essere approssimata da una retta – più precisamente dalla retta tangente alla funzione stessa in x_0 – commettendo un errore che risulta essere trascurabile) si dice che la funzione è differenziabile nel punto x_0. Nel caso di funzioni reali di variabile reale (cioè $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) la nozione di differenziabilità è equivalente a quella di derivabilità (cioè una funzione è differenziabile in un punto se e solo se è derivabile in quel punto), mentre nel caso di funzioni reali di più variabili reali (cioè $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) questa equivalenza non è più valida (in particolare, la nozione di differenziabilità implica quella di derivabilità ma non vale necessariamente il viceversa).

Esempio 4.7 *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:*

$$f(x) = x^2 e^{x-1}$$

in corrispondenza del punto $x_0 = 1$ *e il differenziale della funzione in corrispondenza dello stesso punto.*

L'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $(1, f(1))$ è data da:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

per cui si devono considerare:

$$f(x) = x^2 e^{x-1} \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = x^2 e^{x-1} + 2xe^{x-1} = e^{x-1}(x^2 + 2x) \Rightarrow f'(1) = 3$$

dopodiché si ottiene:

$$y = 1 + 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2$$

che è l'equazione della retta cercata.

Il differenziale della funzione invece è:

$$dy = f'(x)dx$$

cioè:

$$dy = \left[e^{x-1}(x^2 + 2x)\right] dx$$

e nel punto $x_0 = 1$ tale differenziale vale:

$$dy = 3dx$$

Esempio 4.8 *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{x - 2}$$

in corrispondenza del punto $x_0 = 3$ e il differenziale della funzione in corrispondenza dello stesso punto.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $(3, f(3))$ è data da:

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3)$$

per cui si devono considerare:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{x - 2} \Rightarrow f(3) = 17$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(3x^2 - 4) - x^3 + 4x - 2}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(3) = 6$$

dopodiché si ottiene:

$$y = 17 + 6(x - 3) \Rightarrow y = 6x - 1$$

che è l'equazione della retta cercata.

Il differenziale della funzione invece è:

$$dy = f'(x)dx$$

cioè:

$$dy = \left[\frac{2x^3 - 6x^2 + 6}{(x-2)^2}\right] dx$$

e nel punto $x_0 = 3$ tale differenziale vale:

$$dy = 6dx$$

4.3. Derivabilità e continuità

La continuità e la derivabilità di una funzione rappresentano importanti condizioni di regolarità che consentono di ottenere informazioni sul comportamento della funzione stessa. Per quanto riguarda il legame esistente tra queste due nozioni, come è già stato detto in precedenza, si ha che se una funzione è derivabile in un punto allora è anche continua in quel punto. Non vale invece necessariamente il viceversa (cioè una funzione può essere continua in un punto senza essere derivabile in quel punto), per cui si può dedurre che la derivabilità rappresenta una condizione più restrittiva della continuità. Come conseguenza della prima relazione, inoltre, si ha che se una funzione non è continua in un punto, allora sicuramente non è neanche derivabile in quel punto.

Come è stato illustrato nel Capitolo precedente a proposito della continuità, in genere le funzioni elementari (e quelle da esse ottenute attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione) sono continue e derivabili su tutto il loro dominio (tranne eventualmente in singoli punti). Il problema sorge nel caso di funzioni definite a tratti, relativamente ai punti in corrispondenza dei quali cambia l'espressione analitica della funzione, per cui in questi punti occorre studiare espressamente la continuità e la derivabilità delle funzioni in esame. A questo proposito, una condizione sufficiente che può essere utilizzata per verificare la derivabilità di una funzione in un punto (senza dover ricorrere alla definizione) è la seguente:

Se f è definita e continua in un intorno di x_0 (compreso x_0) ed è derivabile in ogni punto $x \neq x_0$, e se esiste finito il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 e si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Questo risultato esprime in sostanza la continuità, nel punto x_0, della derivata prima, in quanto la duplice uguaglianza sopra riportata è esattamente la definizione di continuità nel punto x_0 applicata alla funzione $f'(x)$.

Esempio 4.9 *Discutere la continuità e la derivabilità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ \\ e^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la continuità si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari che sono continue sul loro dominio). Per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre poi considerare:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$f(0) = 0$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora $f(x)$ è continua anche in $x = 0$.

Per quanto riguarda la derivabilità, invece, si ha innanzitutto che, per $x \neq 0$, la funzione è derivabile con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

(si può notare che, nel caso di funzione definita a tratti, passando dall'espressione della funzione $f(x)$ a quella della sua derivata $f'(x)$ si "perde" un punto, che è il punto in corrispondenza del quale cambia l'espressione analitica della funzione – in questo caso si tratta dell'origine –). A questo punto, per verificare se $f(x)$ è derivabile anche nell'origine (tenendo presente che in tale punto è continua, poiché se non lo fosse non potrebbe neanche essere derivabile) si può applicare la condizione sufficiente sopra enunciata, considerando:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Poiché questi due limiti sono uguali si può concludere che $f(x)$ è derivabile anche in $x = 0$, e inoltre:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

Esempio 4.10 *Discutere la continuità e la derivabilità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^x & \textit{se} \quad x \leq 0 \\ \\ -x^2 + 5x + \beta & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda la continuità si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari che sono continue sul loro dominio). Per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre poi considerare:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \alpha e^x = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x^2 + 5x + \beta = \beta$$

$$f(0) = \alpha$$

e perché $f(x)$ sia continua anche in $x = 0$ si deve avere:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

cioè:

$$\alpha = \beta$$

Per quanto riguarda la derivabilità, invece, si ha innanzitutto che, per $x \neq 0$, la funzione è derivabile con:

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha e^x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ -2x + 5 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Perché $f(x)$ sia derivabile anche in $x = 0$ innanzitutto deve essere continua in $x = 0$, quindi deve valere $\alpha = \beta$, inoltre poiché si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \alpha e^x = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -2x + 5 = 5$$

per la condizione sufficiente di derivabilità deve essere $\alpha = 5$. In conclusione, $f(x)$ è derivabile anche in $x = 0$ se $\alpha = \beta = 5$ e in questo caso si ha:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 5$$

4.4. Derivate e comportamento di una funzione

L'analisi delle derivate di una funzione fornisce una serie di informazioni utili per determinare il comportamento della funzione stessa, ed eventualmente giungere ad una sua rappresentazione di tipo grafico. Per poter applicare i risultati illustrati di seguito occorre che le funzioni in esame siano derivabili, ma (come osservato in precedenza) le funzioni elementari e quelle ottenute da esse tramite operazioni algebriche e composizioni sono derivabili (tranne eventualmente in singoli punti), per cui i criteri presentati sono applicabili nella grande maggioranza dei casi (mentre negli eventuali punti di non derivabilità è necessario, per la verifica di determinate proprietà, il ricorso alla corrispondente definizione).

I risultati ottenibili dallo studio delle derivate di una funzione riguardano in particolare:

- monotonia (ed invertibilità) della funzione
- estremanti (massimi e minimi) della funzione
- concavità e convessità (e flessi) della funzione

4.4.1. Monotonia

Per ottenere informazioni relative alla monotonia di una funzione è possibile utilizzare la derivata prima della funzione stessa. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su X, e dato un intervallo I contenuto in X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie e sufficienti

$$f \text{ crescente su } I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ decrescente su } I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

(b) Condizioni sufficienti

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente crescente su } I$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente decrescente su } I$$

Si deve tenere presente che l'utilizzo di queste condizioni per la verifica della monotonia di una funzione sul proprio insieme di definizione richiede che esso sia un intervallo; in caso contrario, i risultati possono essere applicati sui singoli intervalli che costituiscono il dominio della funzione, ma non possono essere applicati globalmente.

Le condizioni legate alla monotonia di una funzione possono inoltre essere utilizzate per ottenere informazioni relative alla sua invertibilità. Come è stato osservato nel Capitolo 2, la stretta monotonia di una funzione su di un intervallo è condizione sufficiente per la sua invertibilità su quell'intervallo. Nel caso di funzioni derivabili si ha allora che condizione sufficiente affinché una funzione f sia invertibile su di un intervallo I è che abbia su questo intervallo derivata prima di segno costante (diverso da 0), cioè si ha:

$$f'(x) > 0 \text{ (oppure } f'(x) < 0) \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ invertibile su } I$$

4.4.2. Massimi e minimi

Lo studio del segno della derivata prima di una funzione consente anche di ottenere informazioni relative alla presenza di eventuali estremanti (massimi e minimi) della funzione stessa. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su X, con x_0 punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ e derivabile in un intorno di x_0, $U(x_0)$, con esclusione al più del punto x_0, valgono poi i seguenti risultati:

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\[2ex] f'(x) < 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\[2ex] f'(x) > 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo}$$

Si deve tenere presente che le condizioni necessarie illustrate al punto (a) per la verifica della presenza di massimi e minimi richiedono che tali punti siano interni all'insieme di definizione. Le condizioni sufficienti illustrate al punto (b) invece consentono di individuare tali estremanti anche quando le condizioni necessarie non sono applicabili (cioè nel caso di punti non interni al dominio, così come nel caso di punti isolati o di punti di non derivabilità).

4.4.3. Concavità e convessità

Per ottenere informazioni relative alla concavità e convessità di una funzione è necessario introdurre la derivata seconda della funzione stessa. Questa non è altro che la derivata della derivata prima (cioè il limite del rapporto incrementale costruito utilizzando la funzione f' anziché la funzione f, purché questo limite esista finito), e si calcola usando le stesse regole viste in precedenza, applicate alla funzione f' anziché alla funzione f.

A questo punto, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, e dato un intervallo I contenuto in X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie e sufficienti

$$f \text{ convessa su } I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ concava su } I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

(b) Condizioni sufficienti

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente convessa su } I$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente concava su } I$$

Lo studio della derivata seconda consente inoltre di individuare la presenza di eventuali flessi. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, con x_0 punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$x_0 \text{ punto di flesso} \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ e derivabile due volte in un intorno di x_0, $U(x_0)$, con esclusione al più del punto x_0, valgono poi i seguenti risultati:

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ \\ f''(x) < 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di flesso discendente}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) < 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ \\ f''(x) > 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di flesso ascendente}$$

I punti di flesso possono inoltre essere distinti in base al valore della derivata prima della funzione calcolata in corrispondenza di tali punti; se x_0 è un punto di flesso si ha infatti:

flesso a tangente orizzontale se $f'(x_0) = 0$

flesso a tangente verticale se $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$

flesso obliquo negli altri casi

In conclusione, per ottenere informazioni relative al comportamento di una funzione servendosi delle sue derivate, si procede al calcolo delle derivate stesse (derivata prima e derivata seconda) e poi allo studio del loro segno. Applicando i criteri illustrati, infine, diventa possibile ricavare indicazioni sulla monotonia e la presenza di eventuali estremanti (attraverso la derivata prima) e sulla concavità/convessità e la presenza di eventuali flessi (attraverso la derivata seconda) della funzione in esame.

Esempio 4.11 *Discutere la monotonia e l'invertibilità della funzione:*

$$f(x) = \log \frac{4-x}{x}$$

La funzione è definita per:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4-x}{x} > 0 \\ \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow 0 < x < 4$$

e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-x-4+x}{x^2}}{\dfrac{4-x}{x}} = -\frac{4}{x^2} \cdot \frac{x}{4-x} = -\frac{4}{x(4-x)}$$

Per $0 < x < 4$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è strettamente decrescente sul suo dominio, e perciò è invertibile.

Esempio 4.12 *Discutere la monotonia e l'invertibilità della funzione:*

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 6$$

La funzione è definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{7}}{3} \\ &f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \quad \vee \quad x = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \\ &f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{2-\sqrt{7}}{3} \quad \vee \quad x > \frac{2+\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$ e strettamente crescente su ciascuno degli intervalli $\left(-\infty, \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$. Di conseguenza, $f(x)$ non è invertibile su $\mathbb{R}$, mentre sono invertibili le sue restrizioni a ciascuno dei tre intervalli sopra elencati.

Esempio 4.13 *Determinare eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x) = x(\log x - 2)^2$$

La funzione è definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ e la sua derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(\log x - 2)\frac{1}{x} + (\log x - 2)^2 = (\log x - 2)(2 + \log x - 2) = \\ &= \log x(\log x - 2) \end{aligned}$$

A questo punto, studiando il segno dei due fattori e combinando i risultati si ottiene:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < e^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1 \quad \vee \quad x = e^2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1 \quad \vee \quad x > e^2$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(1, e^2)$ e strettamente crescente sugli intervalli $(0, 1)$ e $(e^2, +\infty)$, di conseguenza $x = 1$ è un punto di massimo relativo e $x = e^2$ è un punto di minimo relativo (e anche di minimo assoluto perché $f(x) \geq 0$ sul suo dominio e $f(e^2) = 0$).

Esempio 4.14 *Determinare eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{x} + 6 - 3x$$

sull'intervallo $[0, 10]$.

La funzione è definita sull'intervallo $[0, +\infty)$, inoltre poiché f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 10]$ per il Teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo assoluti su questo intervallo. La sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 = \frac{1 - 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

per la quale si ha:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{1}{36}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{1}{36}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{1}{36}$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{36}, +\infty\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{36}\right)$ e $x = \frac{1}{36}$ è un punto di massimo relativo. Per individuare massimo e minimo assoluti sull'intervallo $[0, 10]$ è poi necessario prendere in considerazione anche gli estremi di questo intervallo, calcolando il valore della funzione in corrispodenza di questi estremi (e del punto di massimo relativo prima individuato). Poiché si ha:

$$f(0) = 6 \qquad f\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{73}{12} \qquad f(10) = \sqrt{10} - 24$$

si conclude che $x = \frac{1}{36}$ rappresenta il punto di massimo assoluto e $x = 10$ il punto di minimo assoluto di $f(x)$ sull'intervallo $[0, 10]$. Su questo intervallo, come risulta dalla precedente analisi, non è sufficiente l'uso della derivata prima per individuare massimi e minimi, in quanto non tutti sono interni all'intervallo stesso; diventa allora necessario uno studio a parte dei punti che costituiscono gli estremi di tale intervallo.

Esempio 4.15 *Discutere convessità e concavità della funzione:*

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

La funzione è definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = 4x - 1$$

mentre la sua derivata seconda è:

$$f''(x) = 4$$

Poiché $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ si può concludere che $f(x)$ è strettamente convessa su tutto il suo dominio.

Esempio 4.16 *Discutere convessità e concavità della funzione:*

$$f(x) = x(\log x - 2)^2$$

La funzione (la stessa dell'Esempio 4.13) è definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = \log x(\log x - 2)$$

mentre la derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x}(\log x - 2) = \frac{2}{x}(\log x - 1)$$

Sul dominio, il segno di $f''(x)$ dipende solo dal fattore $(\log x - 1)$ (in quanto $\frac{2}{x}$ è sempre positivo) e si ha:

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < e$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = e$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > e$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $(0, e)$ e strettamente convessa sull'intervallo $(e, +\infty)$ e $x = e$ è un punto di flesso (in particolare si tratta di un flesso ascendente obliquo).

4.5. Formula di Taylor-Mac Laurin

La formula di Taylor centrata in x_0 e arrestata all'ordine n consente di approssimare localmente (in un intorno del punto x_0) una funzione, derivabile un opportuno numero di volte, mediante un polinomio di grado n, commettendo in questo modo un errore trascurabile. Vale a questo proposito il seguente risultato:

Se f è una funzione derivabile $n-1$ volte in un intorno U di x_0 e derivabile n volte in x_0, allora $\forall x \in U$ vale il seguente sviluppo in formula di Taylor (con resto di Peano):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n$$

Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ la formula prende il nome di formula di Mac Laurin (con resto di Peano).

Un risultato analogo a quello sopra illustrato è poi il seguente:

Se f è una funzione derivabile $n-1$ volte in x_0 (con derivate continue) e derivabile n volte in un intorno U di x_0 (escluso al più x_0), allora $\forall x \in U$ vale il seguente sviluppo in formula di Taylor (con resto di Lagrange):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

dove c è un opportuno punto interno al segmento di estremi x_0 e x.

Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ la formula prende il nome di formula di Mac Laurin (con resto di Lagrange).

Esempio 4.17 *Determinare lo sviluppo in formula di Taylor (con resto di Peano) centrato in $x_0 = 3$ e arrestato al terzo ordine della funzione:*

$$f(x) = e^x + \cos x$$

Lo sviluppo cercato è:

$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 + o\left((x-3)^3\right)$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x + \cos x & \Rightarrow \quad & f(3) = e^3 + \cos 3 \\
f'(x) &= e^x - \sin x & \Rightarrow \quad & f'(3) = e^3 - \sin 3 \\
f''(x) &= e^x - \cos x & \Rightarrow \quad & f''(3) = e^3 - \cos 3 \\
f'''(x) &= e^x + \sin x & \Rightarrow \quad & f'''(3) = e^3 + \sin 3
\end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$\begin{aligned}
f(x) = {} & e^3 + \cos 3 + (e^3 - \sin 3)(x-3) + \frac{1}{2}(e^3 - \cos 3)(x-3)^2 + \\
& + \frac{1}{6}(e^3 + \sin 3)(x-3)^3 + o\left((x-3)^3\right)
\end{aligned}$$

dove, eventualmente, è possibile esplicitare i calcoli svolgendo i prodotti notevoli $(x-3)^2$ e $(x-3)^3$.

Esempio 4.18 *Determinare lo sviluppo in formula di Mac Laurin (con resto di Peano) arrestato al terzo ordine della funzione considerata nell'esercizio precedente.*

Lo sviluppo cercato è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x + \cos x & \Rightarrow \quad & f(0) = 2 \\
f'(x) &= e^x - \sin x & \Rightarrow \quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= e^x - \cos x & \Rightarrow \quad & f''(0) = 0 \\
f'''(x) &= e^x + \sin x & \Rightarrow \quad & f'''(0) = 1
\end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$f(x) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Esempio 4.19 *Determinare lo sviluppo in formula di Mac Laurin (con resto di Peano) arrestato al terzo ordine della funzione:*

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Lo sviluppo cercato è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin x} & \Rightarrow \quad & f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{\sin x}\cos x & \Rightarrow \quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) & \Rightarrow \quad & f''(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^{\sin x}\cos x(\cos^2 x - 1 - 3\sin x) & \Rightarrow \quad & f'''(0) = 0
\end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ricorrendo agli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari introdotti nel Capitolo precedente. In particolare, data la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ è possibile porre $\sin x = t$, dopodiché la funzione può essere sviluppata in formula di Taylor nel seguente modo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o\left(t^3\right)$$

e sostituendo di nuovo a t l'espressione $\sin x$ si ha:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o\left(\sin^3 x\right)$$

A questo punto è possibile sviluppare la funzione $\sin x$ ottenendo (tenendo presente che nei calcoli tutti i termini di grado superiore al terzo non vengono indicati espressamente in quanto sono incorporati nel simbolo $o\left(x^3\right)$):

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^2 + \\
&= + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

In alternativa, data la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ è possibile sviluppare inizialmente $\sin x$ ottenendo:

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)}$$

dopodiché si pone $x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) = t$ e si sviluppa la funzione esponenziale ottenendo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o\left(t^3\right)$$

e sostituendo di nuovo a t l'espressione $x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$ si ha anche in questo caso:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^2 = \\
&= + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Esempio 4.20 *Determinare lo sviluppo in formula di Mac Laurin (con resto di Lagrange) arrestato al secondo ordine della funzione:*

$$f(x) = e^x + \sin x$$

Lo sviluppo cercato è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 \quad \text{con } c \text{ compreso tra 0 e } x$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x + \sin x &\Rightarrow\quad & f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^x + \cos x &\Rightarrow\quad & f'(0) = 2 \\
f''(x) &= e^x - \sin x &\Rightarrow\quad & f''(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^x - \cos x &\Rightarrow\quad & f'''(c) = e^c - \cos c
\end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^c - \cos c}{6}x^3 \quad \text{con } c \text{ compreso tra 0 e } x$$

Come visto nel Capitolo precedente, infine, gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari possono essere utilizzati nel calcolo di certi limiti, in quanto consentono di superare le forme di indecisione che si presentano nella risoluzione dei limiti stessi.

4.6. Studio di funzioni

I risultati riguardanti le funzioni ottenuti in precedenza (relativamente al dominio, al segno, alle intersezioni con gli assi – presentati nel Capitolo 2 –, ai limiti – presentati nel Capitolo 3 –, alle relazioni tra derivate e monotonia, estremanti e convessità – presentati in questo Capitolo –) possono essere utilizzati congiuntamente per effettuare lo studio di funzioni, che consiste appunto nell'analisi di tutti gli elementi che caratterizzano una funzione, partendo dalla sua espressione analitica, fino ad ottenere la sua rappresentazione grafica.

In particolare, nello studio di una funzione è possibile procedere individuando i seguenti elementi:

1. dominio
2. segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

3. comportamento alla frontiera (limiti) e asintoti
4. derivata prima, monotonia, estremi locali
5. derivata seconda, concavità, flessi
6. grafico della funzione

Qualora lo studio del segno della funzione o quello della derivata seconda risulti particolarmente complesso, poi, è possibile tralasciarlo, deducendo l'andamento della funzione dagli altri elementi.

Esempio 4.21 *Studiare la funzione:*

$$f(x) = x^2 e^{2-x}$$

Si ha in questo caso:

- Dominio della funzione

In questo caso non vi sono restrizioni da imporre, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

Si ha $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ e $f(0) = 0$, quindi la funzione interseca gli assi in corrispondenza dell'origine (che è un minimo assoluto), inoltre non presenta simmetrie.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{2-x} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x-2}} = 0^+$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, poiché inoltre:

$$\lim_{x \to \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{2-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{2-x} = -\infty$$

la funzione non presenta asintoti obliqui.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima è:

$$f'(x) = -x^2 e^{2-x} + 2xe^{2-x} = xe^{2-x}(2-x)$$

Il segno di questa derivata dipende da quello di $x(2-x)$ e si ha:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < 0 \quad \vee \quad x > 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 2$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(0, 2)$, inoltre $x = 0$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto) e $x = 2$ è un punto di massimo relativo.

- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda è:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -xe^{2-x} + (2-x)(-xe^{2-x} + e^{2-x}) = -xe^{2-x} + e^{2-x}(2-x)(1-x) = \\ &= e^{2-x}(x^2 - 4x + 2) \end{aligned}$$

Il segno di questa derivata dipende solo dal secondo fattore e si ha:

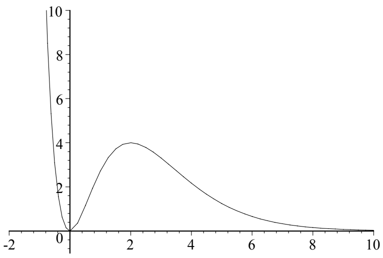
$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 2 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 + \sqrt{2}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 2 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x > 2 + \sqrt{2}$$

per cui $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ e strettamente convessa sugli intervalli $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ e $\left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$, inoltre $x = 2-\sqrt{2}$ e $x = 2+\sqrt{2}$ sono punti di flesso.

- Grafico della funzione



Esempio 4.22 *Studiare la funzione:*

$$f(x) = 3\frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| + 1}$$

Si ha in questo caso:

- Dominio della funzione

In questo caso deve essere $|x| + 1 \neq 0$, che è sempre vero, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

È possibile innanzitutto osservare che vale:

$$f(-x) = 3\frac{(-x)^2 - 2|-x| + 1}{|-x| + 1} = 3\frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| + 1} = f(x)$$

per cui $f(x)$ è pari. È allora sufficiente studiarla per $x \geq 0$ (in quanto il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) e si ha:

$$f(x) = 3\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = 3\frac{(x - 1)^2}{x + 1} \qquad \text{con } x \geq 0$$

da cui risulta $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$, inoltre $f(0) = 3$ e $f(1) = 0$, per cui la funzione interseca l'asse x nel punto $(1, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 3)$. Il punto $x = 1$, infine, è un punto di minimo assoluto.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{x^2-2x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{x^2-2x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 3$$

e infine:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3\frac{x^2-2x+1}{x+1}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3\frac{-3x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -9$$

per cui la funzione $f(x)$ ammette, per $x \to +\infty$, asintoto obliquo di equazione $y = 3x - 9$.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \neq 0$ e la derivata prima (per $x > 0$) è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)6(x-1)-3(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{3(x-1)\left[2(x+1)-(x-1)\right]}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{3(x-1)(2x+2-x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende (per $x > 0$) solo da quello di $(x-1)$, si ha allora:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(0,1)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(1,+\infty)$, inoltre $x=1$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto).

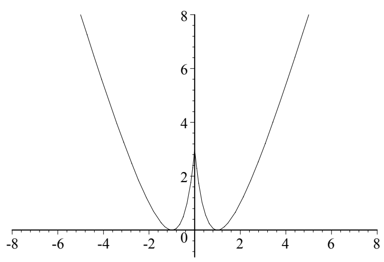
- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \neq 0$ e la derivata seconda (per $x>0$) è:

$$\begin{aligned} f^{''}(x) &= \frac{(x+1)^2 3(2x+2) - 3(x^2+2x-3)2(x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{6(x+1)^3 - 6(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{6(x+1)\left[(x+1)^2 - x^2 - 2x + 3\right]}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{6(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{24}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

e per $x>0$ si ha $f''(x)>0$, per cui $f(x)$ è strettamente convessa sull'intervallo $(0,+\infty)$.

- Grafico della funzione



4.7. Esercizi da svolgere

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{2-x}\right)$

2) $f(x) = \dfrac{\log 3x}{1+\log 3x}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-2x}$

4) $f(x) = e^{\frac{4-x}{1-x}}$

5) $f(x) = (xe^x)^x$

Data la funzione $y = f(x)$, calcolare la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ in corrispondenza del punto $y_0 = f(x_0)$:

6) $y = f(x) = e^{x^2-2}$ con $x_0 = 1$

7) $y = f(x) = \log(x^2+2)$ con $x_0 = -1$

8) $y = f(x) = \sqrt{e^x}$ con $x_0 = 2$

9) $y = f(x) = \sqrt{e^{x^2-2}}$ con $x_0 = 2$

10) $y = f(x) = e^{x^2+2}$ con $x_0 = 1$

Data la funzione $f(x)$, determinare l'equazione della retta tangente a $f(x)$ in corrispondenza del punto x_0:

11) $f(x) = 2\sqrt{x} + 5x$ con $x_0 = 1$

12) $f(x) = \log x + 5x$ con $x_0 = 1$

13) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ con $x_0 = 2$

14) $f(x) = \log x + \sqrt{x}$ con $x_0 = 1$

15) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 \qquad \text{con} \quad x_0 = 1$

Discutere la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni sul loro dominio:

16) $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \alpha \log x + \beta & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

17) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \log(1+x) + \dfrac{3}{1+x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Discutere la monotonia e determinare eventuali massimi e minimi delle seguenti funzioni:

18) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

19) $f(x) = \sqrt{x} + x$ sull'intervallo $[1, 2]$

20) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$ sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

21) $f(x) = -\sqrt{x} - x$ sull'intervallo $[0, 1]$

22) $f(x) = 2 \log x + x^2$

Discutere la concavità e convessità delle seguenti funzioni:

23) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6$

24) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 3}$

Determinare lo sviluppo in formula di Taylor-Mac Laurin, centrato in x_0 *e arrestato all'ordine* n*, delle seguenti funzioni:*

25) $f(x) = e^{\log x} \qquad x_0 = 1 \qquad n = 2$

26) $f(x) = e^x - \sin x \qquad x_0 = 0 \qquad n = 3$

27) $f(x) = e^x \log x \qquad x_0 = 1 \qquad n = 2$

28) $f(x) = \sqrt{1 + 2x} \qquad x_0 = 0 \qquad n = 3$

Studiare le seguenti funzioni:

29) $f(x) = e^{-x^2 + \log x + 2}$

30) $f(x) = \dfrac{e^{|x|-3}}{x}$

Capitolo 5

Calcolo integrale

5.1. Primitive e integrale indefinito

Nell'ambito del calcolo differenziale, introdotto nel Capitolo 4, data una funzione f è possibile associare ad essa una nuova funzione, detta funzione derivata, che viene indicata con f'. Nell'ambito del calcolo integrale il primo passo consiste nel procedere in modo inverso, per cui data una funzione f occorre determinare una funzione F la cui derivata sia proprio la funzione di partenza. Diventa così possibile introdurre la nozione di primitiva di una funzione e, successivamente, quella di integrale indefinito.

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un intervallo I contenuto in X, una funzione $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se vale:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Se una funzione ammette una primitiva, inoltre, ne ammette infinite, le quali differiscono tra di loro per una costante arbitraria, cioè se F è una primitiva di f anche $F + c$ (dove c è una costante) è una primitiva di f, infatti si ha:

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x) \qquad \forall x \in I$$

che indica appunto che anche $F + c$ è una primitiva di f. È invece unica la primitiva di f che assume un valore assegnato y_0 in corrispondenza di un dato $x_0 \in I$, cioè la primitiva di f che passa per il punto $P = (x_0, y_0)$.

Considerando infatti la generica primitiva $F(x) + c$ della funzione $f(x)$ ed imponendo che essa passi per il punto P, cioè imponendo la condizione:

$$F(x_0) + c = y_0$$

si ottiene:

$$c = y_0 - F(x_0)$$

e sostituendo questo valore della costante in $F(x) + c$ si ha che la primitiva cercata è:

$$F(x) + c = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f assume particolare importanza e prende il nome di integrale indefinito di f, che si indica con il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

per cui si ha:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

La funzione f viene detta funzione integranda, mentre x costituisce la variabile di integrazione.

Il problema dell'integrazione indefinita di una funzione f consiste nella determinazione del suo integrale indefinito, quindi nella individuazione di una sua primitiva. A questo scopo si utilizzano alcune regole che consentono di ricondurre il calcolo della primitiva di una funzione qualsiasi a quello delle primitive delle funzioni elementari (che sono note), in modo del tutto analogo a quanto visto con riferimento al calcolo delle derivate. In effetti, un primo risultato è costituito dai cosiddetti integrali immediati, che si ottengono semplicemente interpretando "a rovescio" la tabella relativa alle derivate delle funzioni elementari, introdotta nel Capitolo precedente.

Si hanno allora i seguenti risultati:

Formula di derivazione	Formula di integrazione
$Dx = 1$	$\int 1dx = x + c$
$D\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = x^\alpha \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$D\frac{a^x}{\log a} = a^x \quad \text{con } 0 < a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$D\log\|x\| = \frac{1}{x} \quad \text{con } x \neq 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\|x\| + c$
$D\log\|f(x)\| = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\|f(x)\| + c$
$D\sin x = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$D\cos x = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$Dtgx = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$
$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con } -1 < x < 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con } -1 < x < 1$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$
$Darctgx = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$

Partendo da questi integrali immediati, poi, per calcolare gli integrali di funzioni qualsiasi si sfruttano due proprietà dell'integrale indefinito e due metodi di integrazione, allo scopo di ricondurre gli integrali che si vogliono calcolare ad uno o più integrali immediati (che quindi si sanno calcolare).

Le due proprietà utilizzate sono le seguenti:

(i) *Omogeneità.* Se $f(x)$ è una funzione continua e k è una costante, allora:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

(ii) *Additività rispetto alla funzione integranda.* Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, allora:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(e lo stesso vale nel caso di somma di più di due funzioni).

Queste due proprietà indicano che le costanti moltiplicative possono essere "portate fuori" dal segno di integrale e che l'integrale di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni. Considerando congiuntamente le proprietà (i) e (ii) si ha che l'integrale indefinito soddisfa la proprietà di linearità, che può essere riassunta nell'espressione:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx$$

in base alla quale l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è uguale alla combinazione lineare degli integrali delle singole funzioni, e che esprime il cosiddetto procedimento di integrazione per scomposizione.

I due metodi di integrazione utilizzati sono invece i seguenti:

(i) *Integrazione per sostituzione.* Se $f(x)$ è una funzione continua e $x = \varphi(t)$ è una funzione dotata di derivata continua, tale da poter considerare la funzione composta $f(\varphi(t))$, allora:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

In pratica, questo metodo viene utilizzato effettuando, nell'integrale di partenza, la sostituzione $x = \varphi(t)$ e tenendo presente che da essa, differenziando entrambi i membri, si ha $dx = \varphi'(t)dt$ che va anch'esso sostituito nell'integrale di partenza (dove, quindi, il simbolo dx viene interpretato come simbolo di differenziale).

(ii) Integrazione per parti. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue dotate di derivata continua, allora:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

In pratica, questo metodo viene utilizzato per calcolare l'integrale indefinito di una funzione che può essere espressa come prodotto di due funzioni $f(x)$ e $g'(x)$, una delle quali è la derivata di una funzione nota. In questo caso, nell'integrale di partenza, $f(x)$ prende il nome di fattore finito mentre $g'(x)dx$ prende il nome di fattore differenziale.

In definitiva, lo scopo di questi metodi di integrazione è quello di ricondurre il calcolo di un dato integrale a quello di un integrale più semplice (attraverso un'opportuna sostituzione, oppure attraverso una scelta opportuna del fattore finito e del fattore differenziale), che quindi si riesce a risolvere.

Per quanto riguarda infine l'individuazione di condizioni che garantiscono l'integrabilità di una funzione, si può dimostrare che ogni funzione continua su di un intervallo ammette primitive su quell'intervallo. Non sempre però queste primitive possono essere espresse per mezzo di funzioni elementari; quando questo è possibile si dice che la funzione considerata è integrabile elementarmente.

Esempio 5.1 *Determinare la generica primitiva della funzione:*

$$f(x) = x^2 + 2x + 5$$

In questo caso, utilizzando il procedimento di integrazione per scomposizione, si ottiene innanzitutto:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 + 2x + 5\right) dx &= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx = \\ &= \int x^2 dx + 2\int x dx + 5\int dx\end{aligned}$$

A questo punto ognuno degli integrali nei quali è stato scomposto quello di partenza è facilmente calcolabile (in quanto si tratta di integrali immediati), si ha allora:

$$\begin{aligned}\int x^2 dx + 2\int x dx + 5\int dx &= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 5x + c = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + c\end{aligned}$$

che rappresenta la generica primitiva della funzione $f(x)$. Si può anche osservare che nel calcolo di un integrale è possibile verificare l'esattezza del risultato ottenuto, semplicemente derivando la funzione risultante dai calcoli; poiché questa rappresenta una primitiva della funzione di partenza, per definizione la sua derivata deve essere proprio la funzione considerata all'inizio, cioè quella che compare sotto il segno di integrale. Nel caso in esame si ha:

$$D\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + c\right) = x^2 + 2x + 5$$

che è appunto la funzione di partenza, per cui quella ottenuta è effettivamente la sua generica primitiva (cioè il suo integrale indefinito).

Esempio 5.2 *Determinare la primitiva della funzione:*

$$f(x) = x^2 + 2x + 5$$

passante per il punto $P = (3, 8)$.

In questo caso occorre innanzitutto determinare la generica primitiva di $f(x)$, che è (come è stato calcolato nell'esercizio precedente):

$$\int \left(x^2 + 2x + 5\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + c$$

A questo punto si impone che questa funzione passi per il punto $P = (3, 8)$, cioè:

$$\frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2 + 5 \cdot 3 + c = 8$$

da cui si ottiene:

$$33 + c = 8 \Rightarrow c = -25$$

e sostituendo nella generica primitiva il valore di c così trovato si ha:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x - 25$$

che rappresenta la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P = (3, 8)$.

Esempio 5.3 *Determinare la generica primitiva della funzione:*

$$f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt{x} - 4}{x}$$

e successivamente individuare la primitiva di questa stessa funzione passante per il punto $P = (1, 0)$.

In questo caso, utilizzando il procedimento di integrazione per scomposizione, si ottiene innanzitutto:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} - 4}{x} dx &= \int \frac{2x^3}{x} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx - \int \frac{4}{x} dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 4 \int \frac{1}{x} dx\end{aligned}$$

A questo punto ognuno degli integrali ottenuti è facilmente calcolabile (in quanto si tratta di integrali immediati), si ha allora:

$$\begin{aligned}2 \int x^2 dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 4 \int \frac{1}{x} dx &= 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 4 \log|x| + c = \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 2\sqrt{x} - 4 \log|x| + c\end{aligned}$$

che rappresenta la generica primitiva della funzione $f(x)$. Imponendo poi che questa primitiva passi per il punto $P = (1, 0)$ si ottiene:

$$\frac{2}{3}(1)^3 - 2\sqrt{1} - 4 \log|1| + c = 0$$

da cui:

$$\frac{2}{3} - 2 + c = 0 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

e sostituendo nella generica primitiva il valore di c così trovato si ha:

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\sqrt{x} - 4 \log|x| + \frac{4}{3}$$

che rappresenta la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P = (1, 0)$.

Esempio 5.4 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int \cos(3x+2)dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione, a questo scopo si pone innanzitutto:

$$3x+2=t$$

da cui si ha anche:

$$x=\frac{t-2}{3}$$

e differenziando entrambi i membri si ottiene:

$$dx=\frac{1}{3}dt$$

A questo punto si sostituiscono le espressioni ottenute per $3x+2$ e per dx nell'integrale di partenza, che diventa:

$$\int \cos(3x+2)dx=\int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt$$

Questo integrale è facilmente risolvibile, si ha infatti:

$$\int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int \cos t dt=\frac{1}{3}\sin t+c$$

ed infine, sostituendo a t la sua espressione originaria, si ottiene:

$$\frac{1}{3}\sin(3x+2)+c$$

che rappresenta l'integrale cercato.

Esempio 5.5 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int \log x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, a questo scopo l'integrale che si sta cercando può innanzitutto essere scritto come:

$$\int 1\cdot\log x dx$$

dopodiché occorre individuare, tra i due fattori presenti sotto il segno di integrale, il fattore finito ed il fattore differenziale (cioè, in pratica, le funzioni $f(x)$ e $g'(x)$ che compaiono, insieme a $f'(x)$ e $g(x)$, nella formula di integrazione per parti). In questo caso la scelta da effettuare è:

$$f(x) = \log x \qquad g'(x) = 1$$

per cui le funzioni da utilizzare nella formula di integrazione per parti risultano:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= x & g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

e applicando tale formula di integrazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \log x dx &= x \log x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - \int dx = \\ &= x \log x - x + c = x(\log x - 1) + c \end{aligned}$$

che rappresenta l'integrale cercato.

Si deve osservare che, scegliendo $f(x) = 1$ e $g'(x) = \log x$, non si sarebbe potuto risolvere l'integrale in quanto non sarebbe stato possibile risalire alla funzione $g(x)$ che compare nella formula di integrazione per parti (in questo caso essendo $g'(x) = \log x$ la funzione $g(x)$ è la primitiva di $\log x$, cioè proprio quella che si sta cercando di calcolare). In pratica, la regola da seguire è quella che consiste nello scegliere come funzione $g'(x)$ quella più "complicata" ma che nello stesso tempo è integrabile immediatamente tra le due funzioni presenti nell'integrale di partenza (nel caso in esame la più "complicata" delle due funzioni che compaiono in $\int 1 \cdot \log x dx$ è $\log x$, che però non è integrabile immediatamente, per cui occorre necessariamente scegliere $g'(x) = 1$).

Esempio 5.6 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int x e^x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

e poi:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c =$$
$$= e^x(x-1) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato.

In questo caso si può osservare che, effettuando la scelta $f(x) = e^x$ e $g'(x) = x$, ci si sarebbe trovati a dover calcolare (applicando la formula di integrazione per parti) un integrale più complicato di quello di partenza (per l'esattezza $\int x^2 e^x dx$) per cui non si sarebbe risolto il problema. Resta quindi valida la regola sopra enunciata in base alla quale è opportuno scegliere come funzione $g'(x)$ quella più "complicata" ma che nello stesso tempo è integrabile immediatamente tra le due funzioni presenti nell'integrale di partenza (in questo caso la più "complicata" delle due funzioni che compaiono in $\int xe^x dx$ è e^x, che è integrabile immediatamente, per cui si pone $g'(x) = e^x$).

Esempio 5.7 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int x^2 e^x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

A questo punto il nuovo integrale $\int xe^x dx$ può anch'esso essere risolto per parti (è l'integrale calcolato nell'esercizio precedente), per cui alla fine si ottiene:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left[e^x(x-1) + c\right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c =$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato (in questo caso si può notare che il prodotto $-2c$ che compare svolgendo i calcoli continua ad essere indicato con c in quanto quest'ultima è una costante arbitraria, che quindi può assumere qualsiasi valore, esattamente come $-2c$).

Esempio 5.8 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int e^x \sin x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

A questo punto il nuovo integrale $\int e^x \cos x dx$ può essere risolto anch'esso per parti ponendo:

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

per cui si ottiene:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right] =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

e poi, osservando che a primo e a secondo membro compare lo stesso integrale:

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

e infine:

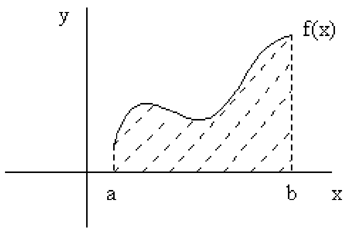
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato (si può notare che a secondo membro la costante c compare nel momento in cui non vi è più il simbolo di integrale, in quanto fino a quel punto essa è di fatto "incorporata" nel simbolo di integrale stesso).

In questo caso l'integrale avrebbe anche potuto essere risolto, sempre per parti, scegliendo all'inizio $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \sin x$ e, in occasione della seconda integrazione per parti, $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$ (cioè occorre scegliere in entrambe le integrazioni per parti come $f(x)$ la funzione esponenziale e come $g'(x)$ la funzione trigonometrica, oppure viceversa, perché altrimenti si viene ad avere l'identità $0 = 0$ che non permette di calcolare l'integrale di partenza).

5.2. Integrale definito

Un concetto diverso rispetto a quello di integrale indefinito introdotto nella Sezione precedente è quello di integrale definito. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un intervallo $I = [a, b]$ contenuto in X, si chiama integrale definito di f tra a e b il numero che rappresenta l'area (con segno) della superficie compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[a, b]$, cioè:



Questo integrale si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove f prende il nome di funzione integranda, x è la variabile di integrazione, mentre a e b costituiscono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di integrazione.

Nel caso di una funzione $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$ (cioè di una funzione il cui grafico non si trova mai al di sotto dell'asse delle ascisse) il valore dell'integrale risulta a sua volta ≥ 0, mentre nel caso di una funzione $f(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b]$ (cioè di una funzione il cui grafico non si trova mai al di sopra dell'asse delle ascisse) il valore dell'integrale risulta a sua volta ≤ 0. Nel caso di una funzione $f(x)$ che cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, invece, il valore dell'integrale rappresenta la differenza tra l'area (positiva) della superficie compresa tra la parte di grafico che si trova al di sopra dell'asse delle ascisse e l'asse delle ascisse stesso e l'area (negativa) della superficie compresa tra la parte di grafico che si trova al di sotto dell'asse delle ascisse e l'asse delle ascisse stesso, cioè in questo caso il valore dell'integrale esprime il risultato della "compensazione" tra aree positive e negative.

Per quanto riguarda l'individuazione di condizioni che garantiscono l'esistenza dell'integrale definito di una funzione, si può dimostrare che ogni funzione continua su di un intervallo chiuso $[a, b]$, oppure limitata sull'intervallo $[a, b]$ con un numero finito di punti di discontinuità, oppure monotona sull'intervallo $[a, b]$ risulta integrabile su tale intervallo.

L'integrale definito gode di una serie di proprietà; innanzitutto si pone per definizione:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{con } a < b$$

dopodiché valgono le seguenti proprietà (dove f e g sono funzioni continue, quindi integrabili, sull'intervallo $[a, b]$):

(i) *Omogeneità. S*e k è una costante, allora:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(ii) *Additività rispetto alla funzione integranda.* Si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(iii) *Linearità.* Dalle proprietà (i) e (ii) si ottiene:

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^n k_i \int_a^b f_i(x)dx$$

(iv) *Additività rispetto all'intervallo di integrazione.* Si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \forall c \in (a, b)$$

(v) *Positività.* Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(*vi*) *Monotonia.* Se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(*vii*) Si ha:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

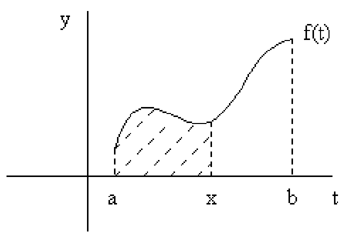
Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (o Teorema di Torricelli-Barrow) stabilisce poi il legame esistente tra calcolo differenziale e calcolo integrale (e anche tra integrale definito e integrale indefinito), e fornisce la regola che consente, in pratica, il calcolo di un integrale definito. In base a questo teorema, data una funzione $f(x)$ continua su $[a,b]$, la corrispondente funzione integrale, che è definita come:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con } x \in [a,b]$$

è continua e derivabile $\forall x \in [a,b]$ e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$

La funzione integrale è una funzione che indica il valore dell'area (con segno) della superficie compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[a,x]$, con x che varia in $[a,b]$ (perciò al variare di x cambia il valore dell'area, e per questo si ottiene una funzione), cioè si ha:



e dal teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale di f risulta essere una primitiva di f, più precisamente quella che in $x = a$ vale 0 (poiché $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$). Da questo teorema si ha poi, come corollario, che il calcolo di un integrale definito può essere effettuato utilizzando la seguente formula:

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

dove G è una qualunque primitiva di f. Questo significa che l'integrale definito di una funzione (continua) su di un intervallo è uguale alla differenza tra i valori che una qualsiasi primitiva della funzione stessa assume nell'estremo superiore e nell'estremo inferiore di integrazione.

Esempio 5.9 *Calcolare l'integrale definito di $f(x) = x$ prima sull'intervallo $[0, 1]$ e poi sull'intervallo $[-1, 1]$.*

In questo caso si ha (tenendo presente che una primitiva di x è $\frac{x^2}{2}$):

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

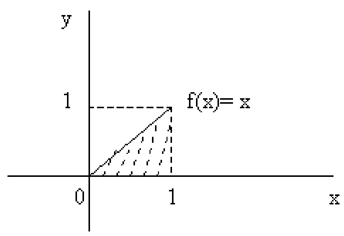
che rappresenta il valore dell'integrale sull'intervallo $[0, 1]$, e poi:

$$\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

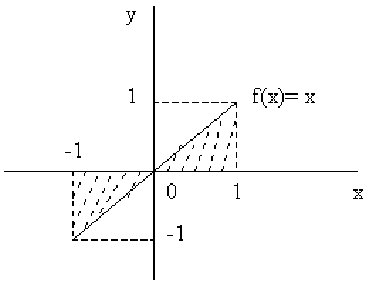
che rappresenta il valore dell'integrale sull'intervallo $[-1, 1]$.

Si può osservare che, nella scelta della primitiva da utilizzare per il calcolo, è possibile tralasciare la costante arbitraria c (cioè, di fatto, scegliere $c = 0$) in quanto tale costante si annulla comunque effettuando la differenza tra i valori che la primitiva assume in corrispondenza dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di integrazione.

Questo esempio può inoltre essere utilizzato per mettere in evidenza il significato geometrico dell'integrale definito; in particolare, il primo integrale costituisce l'area (positiva) del triangolo (di base ed altezza pari ad 1) rappresentato in figura:



Quest'area è pari a $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ come in effetti risulta dal calcolo dell'integrale definito. Il secondo integrale considerato costituisce invece, dal punto di vista geometrico, la somma algebrica delle aree dei due triangoli rappresentati in figura:



Ciascuna di queste due aree è pari ad $\frac{1}{2}$, ma essendo una positiva e l'altra negativa la loro somma algebrica è uguale a 0, come in effetti risulta dal calcolo dell'integrale definito (che quindi in questo caso esprime la compensazione tra aree positive e aree negative). In pratica, volendo invece utilizzare l'integrale definito per il calcolo di un'area (senza segno) occorre considerare le aree delle parti di piano che si trovano al di sotto dell'asse delle ascisse prendendo il loro valore assoluto. Ad esempio, nell'ultimo caso considerato, per calcolare l'area della parte di piano tratteggiata in figura occorre procedere nel modo seguente:

$$\int_{-1}^{1} xdx = \left|\int_{-1}^{0} xdx\right| + \int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

che rappresenta appunto la somma delle aree (positive) dei due triangoli.

Esempio 5.10 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^3 \left(x^2 + 2x + 5\right) dx$$

In questo caso si ha:

$$\int_0^3 \left(x^2 + 2x + 5\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_0^3 =$$
$$= \left(\frac{27}{3} + 9 + 15\right) - (0 + 0 + 0) = 9 + 9 + 15 = 33$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito.

Esempio 5.11 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_1^2 \frac{2x^3 - \sqrt{x} - 4}{x} dx$$

In questo caso si ha:

$$\int_1^2 \frac{2x^3 - \sqrt{x} - 4}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{2x^3}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(2x^2 - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$= \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 4\log|x| \right]_1^2 = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2\sqrt{x} - 4\log|x| \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{2} - 4\log 2 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 - 0 \right) = \frac{20}{3} - 2\sqrt{2} - 4\log 2$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito.

Esempio 5.12 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

In questo caso l'integrale può essere calcolato effettuando innanzitutto la sostituzione:

$$x^2 + 1 = t$$

da cui si ha anche:

$$x^2 = t - 1$$

e differenziando entrambi i membri:

$$2xdx = dt$$

A questo punto l'integrale diventa:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

dove, passando dall'integrale nella variabile x a quello nella nuova variabile t, anche gli estremi di integrazione vanno cambiati. Più precisamente, i nuovi estremi di integrazione si ottengono sostituendo quelli relativi all'integrale in x (cioè 0 e 1) nell'espressione che definisce la variabile t (cioè $t = x^2 + 1$) ottenendo così gli estremi relativi all'integrale in t (cioè 1 e 2). A questo punto il nuovo integrale può essere facilmente calcolato ottenendo:

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\log |t|]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito di partenza.

Lo stesso risultato può essere ottenuto calcolando prima l'integrale indefinito corrispondente a quello di partenza, cioè (effettuando la stessa sostituzione sopra indicata):

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c$$

quindi sostituendo a t la sua espressione originaria:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1) + c$$

ed infine passando all'integrale definito (mantenendo gli estremi di integrazione originari in quanto la primitiva trovata è funzione della variabile originaria x), ottenendo:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\log(x^2+1)\right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che è lo stesso risultato trovato prima.

In questo caso, infine, lo stesso risultato può essere ottenuto anche sfruttando l'integrale immediato:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

in quanto nell'esempio in esame il numeratore della frazione che compare sotto il segno di integrale è esattamente la derivata del denominatore, si ha allora:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\log \left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che è lo stesso risultato trovato in precedenza.

Esempio 5.13 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_{-1}^{4} e^{\sqrt{x+1}} dx$$

In questo caso è possibile innanzitutto effettuare la sostituzione:

$$\sqrt{x+1} = t$$

da cui si ottiene:

$$x = t^2 - 1$$

e anche:

$$dx = 2tdt$$

A questo punto l'integrale di partenza diventa (tenendo presente che gli estremi di integrazione vanno cambiati):

$$\int_{-1}^{4} e^{\sqrt{x+1}} dx = \int_{0}^{\sqrt{5}} e^t 2tdt = 2\int_{0}^{\sqrt{5}} te^t dt$$

Questo integrale può essere calcolato per parti ponendo:

$$f(t) = t \qquad f'(t) = 1$$

$$g(t) = e^t \qquad g'(t) = e^t$$

dopodiché si ha:

$$2\int_{0}^{\sqrt{5}} te^t dt = 2\left[\left[te^t\right]_0^{\sqrt{5}} - \int_{0}^{\sqrt{5}} e^t dt\right] = 2\left[\left[te^t\right]_0^{\sqrt{5}} - \left[e^t\right]_0^{\sqrt{5}}\right] =$$
$$= 2\left[\left(\sqrt{5}e^{\sqrt{5}} - 0\right) - \left(e^{\sqrt{5}} - 1\right)\right] = 2\left(\sqrt{5}e^{\sqrt{5}} - e^{\sqrt{5}} + 1\right)$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito di partenza.

Esempio 5.14 *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ l'area sottesa dal grafico della funzione è uguale a 1.

In questo caso deve essere:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

ma poiché al di fuori dell'intervallo $[0, 2]$ la funzione è nulla si ha anche:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = 1$$

e sostituendo a $f(x)$ la sua espressione sull'intervallo in esame si ha:

$$\int_0^2 \alpha x dx = 1$$

Calcolando l'integrale si ha allora:

$$\alpha \int_0^2 x dx = 1 \Rightarrow \alpha \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Rightarrow \alpha \left(\frac{4}{2} - 0\right) = 1 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

per cui per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ l'area sottesa dal grafico della funzione risulta uguale a 1.

5.3. Esercizi da svolgere

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \left(x + 2x^2 + 3x^3\right) dx$

2) $\displaystyle\int \left(2x + 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}\right) dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x + 5}{\sqrt{x}} dx$

4) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x dx$

5) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x} dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} dx$

7) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

8) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

9) $\displaystyle\int (x+1)e^{-x} dx$

10) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} dx$

Determinare la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P = (x_0, y_0)$:

11) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ con $P = (-1, 1)$

12) $f(x) = \cos x + x + 3x^2$ con $P = (0, 1)$

13) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ con $P = (1, 1)$

14) $f(x) = (2x + 3)^2$ con $P = (0, -1)$

15) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + 2}{\sqrt{x}}$ con $P = (1, 1)$

16) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 1}$ con $P = (1, -1)$

17) $f(x) = e^{\sin x}\cos x$ con $P = (0, 2)$

18) $f(x) = e^{2x-3}$ con $P = (1, 0)$

Calcolare i seguenti integrali definiti:

19) $\int_1^2 e^{x-1}dx$

20) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1}dx$

21) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$

22) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx$

23) $\int_0^1 (x+\sqrt{x})\,dx$

24) $\int_0^5 e^x \sin x dx$

25) $\int_0^2 \sqrt[3]{x}dx$

26) $\int_1^2 xe^x dx$

27) $\int_1^2 \frac{x+3}{2}dx$

28) $\int_1^2 x\log x dx$

29) *Sia* $f : R \to R$ *definita da* $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & \textit{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$. *Determinare per quali valori di* $\alpha \in R^+$ *l'area sottesa dal grafico della funzione è uguale a* 1.

30) *Sia* $f : [0,2] \to R$ *definita da* $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2\alpha x & \textit{se } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \textit{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$. *Determinare per quali valori di* $\alpha \in R^+$ *l'area sottesa dal grafico della funzione è uguale a* 2.

Capitolo 6

Algebra lineare

6.1. Vettori: definizioni e proprietà

L'algebra lineare è un insieme di regole di calcolo costruite a partire da oggetti che prendono il nome di vettori e matrici, e che sono sostanzialmente delle tabelle numeriche utilizzate in molte applicazioni. Il punto di partenza dell'analisi è allora costituito dalla definizione dei concetti di vettore e, successivamente, di matrice e dallo studio delle operazioni che è possibile introdurre tra di essi.

Si chiama vettore una n-pla ordinata di numeri reali, che si indica con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le componenti del vettore. Lo stesso vettore (che prende il nome di vettore colonna) può essere rappresentato nel modo seguente:

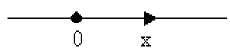
$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}$$

e si parla allora di vettore trasposto di $\mathbf{x}$ (e anche di vettore riga).

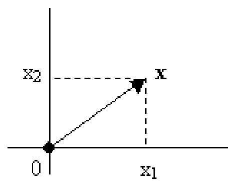
L'insieme di tutti i vettori con n componenti reali si indica con $\mathbb{R}^n$, che è dato dal prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ considerato n volte, cioè si ha:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

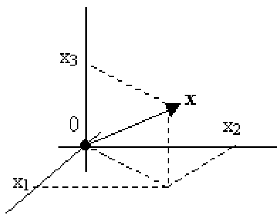
I numeri reali possono essere visti come un tipo particolare di vettori, con una sola componente, e come è noto possono essere rappresentati su di una retta, che costituisce quindi l'immagine geometrica dell'insieme $\mathbb{R}$:



In modo analogo, i vettori a due componenti (cioè le coppie di numeri reali) possono essere rappresentati su di un piano, che costituisce quindi l'immagine geometrica di $\mathbb{R}^2$:



e i vettori a tre componenti (cioè le terne di numeri reali) possono essere rappresentati nello spazio tridimensionale, che costituisce quindi l'immagine geometrica di $\mathbb{R}^3$:



mentre per $n \geq 4$ non è più possibile una rappresentazione di tipo geometrico.

Tra i vettori di $\mathbb{R}^n$ assumono particolare importanza i cosiddetti vettori fondamentali (o "versori"), denotati con $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$. Il generico vettore fondamentale $\mathbf{e}^i$ ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima, che è uguale a 1, si ha cioè:

$$\mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ i vettori fondamentali sono:

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Due vettori con lo stesso numero di componenti sono uguali quando le componenti di posto uguale coincidono, cioè:

$$\text{Dati} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \ \ \mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

Ad esempio, i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono chiaramente uguali, mentre i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non lo sono (in quanto nei vettori è importante l'ordine delle componenti).

Tra i vettori è inoltre possibile introdurre un ordinamento (parziale), per cui si ha:

$$\text{Dati} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \ \ \mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

(in modo analogo si introducono le relazioni di $<$, $\geq$, $\leq$). L'ordinamento è parziale perché (a differenza di quanto accade con i numeri) dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ non è necessariamente vero che $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (eventualmente $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$) oppure $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ (eventualmente $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$) oppure $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Considerando ad esempio i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

si ha $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, mentre considerando i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ha $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, se però si considerano i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in questo caso $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono tra loro confrontabili.

Si introduce poi la nozione di vettore positivo nel modo seguente:

$$\text{Dato} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \ \ \mathbf{x} > \mathbf{0} \Leftrightarrow x_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

dove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo (cioè il vettore con le componenti tutte nulle). In modo analogo si possono definire vettori negativi ($\mathbf{x} < \mathbf{0}$) e anche vettori non negativi ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$) e vettori non positivi ($\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$).

6.2. Operazioni tra vettori

Diventa a questo punto possibile introdurre le operazioni tra vettori, che sono 3. Servendosi di queste operazioni, poi, si possono introdurre altre due nozioni di particolare importanza, quella di norma di un vettore e quella di combinazione lineare di vettori (con i concetti di dipendenza e indipendenza lineare).

6.2.1. Somma di vettori

La prima operazione che si può introdurre è la somma di vettori. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

si chiama somma il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dato da:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

cioè il vettore che si ottiene sommando ogni componente del primo vettore con la corrispondente componente del secondo vettore.

6.2.2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La seconda operazione è la moltiplicazione di un vettore per uno scalare (cioè per un numero reale). Dati $c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto del vettore $\mathbf{x}$ per lo scalare c il vettore $c\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dato da:

$$c\mathbf{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ ... \\ cx_n \end{pmatrix}$$

cioè il vettore che si ottiene moltiplicando ogni componente del vettore di partenza per lo scalare.

6.2.3. Prodotto scalare tra vettori

La terza operazione è il prodotto scalare (o prodotto interno) tra vettori. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto scalare (o prodotto interno) il numero dato da:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

cioè il numero che si ottiene moltiplicando ogni componente del primo vettore per la corrispondente componente del secondo vettore e sommando tra di loro i vari prodotti così ottenuti. A differenza di quanto accade nel caso di prodotto tra numeri, per il prodotto interno non vale la legge di annullamento (il prodotto scalare di due vettori, di cui uno è il vettore nullo, è uguale a zero, ma il prodotto scalare può essere uguale a zero senza che nessuno dei fattori sia il vettore nullo). Due vettori il cui prodotto interno è nullo, inoltre, si dicono ortogonali (e si scrive $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$).

Esempio 6.1 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *calcolare la loro somma.*

Si ha in questo caso:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la somma dei due vettori.

Esempio 6.2 *Dato il vettore* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e lo scalare* $c = -3$ *calcolare il prodotto* $c\mathbf{x}$.

Si ha in questo caso:

$$c\mathbf{x} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta il prodotto $-3\mathbf{x}$.

Esempio 6.3 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *calcolare il loro prodotto scalare.*

Si ha in questo caso:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 10$$

che rappresenta il prodotto scalare dei due vettori.

Esempio 6.4 *Determinare per quale valore di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ 8 \end{pmatrix}$ *sono ortogonali.*

Si ha in questo caso:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot \alpha + (-2) \cdot 8 = 3\alpha - 18$$

e poi:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow 3\alpha - 18 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

per cui per $\alpha = 6$ i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali. Questo è un esempio da cui risulta evidente che non vale per il prodotto scalare la legge di annullamento del prodotto, infatti (se $\alpha = 6$) il prodotto interno tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è nullo senza che nessuno dei due vettori sia il vettore nullo.

6.2.4. Norma di un vettore, combinazione lineare di vettori, dipendenza e indipendenza lineare

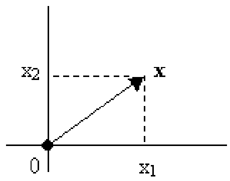
L'operazione di prodotto interno (o prodotto scalare) tra vettori consente di introdurre la nozione di norma di un vettore. Dato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

si chiama norma di $\mathbf{x}$ il numero dato da:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

cioè dalla radice quadrata del prodotto scalare di $\mathbf{x}$ con se stesso. Geometricamente la norma di un vettore rappresenta la lunghezza del segmento che individua il vettore stesso, come risulta evidente nel caso $n = 2$:



in cui, applicando il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come vertici $0, x_1$ e $\mathbf{x}$ è data da $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, che è appunto la norma del vettore in esame.

Le operazioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare, invece, consentono di introdurre la nozione di combinazione lineare di vettori. Dati k vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ e k scalari (cioè numeri) $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$, il vettore dato da:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + ... + c_k\mathbf{x}^k = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}^i$$

si chiama combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ con pesi (o coefficienti) $c_1, c_2, ..., c_k$.

In particolare, si può dimostrare che ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori fondamentali (o versori) $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$ con coefficienti uguali alle componenti x_1, $x_2, ...,$ x_n del vettore, si ha infatti:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + ... + x_n\mathbf{e}^n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}^i$$

La nozione di combinazione lineare consente poi di introdurre quella di dipendenza (e indipendenza) lineare tra vettori. A questo proposito, si dice che i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se uno (almeno) di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri, cioè se esistono degli scalari $c_1, c_2, ..., c_{k-1} \in \mathbb{R}$ tali che è possibile scrivere:

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \mathbf{x}^i$$

(si può sempre pensare che sia l'ultimo vettore ad essere esprimibile come combinazione lineare degli altri, eventualmente cambiando l'ordine). Quando invece questa rappresentazione non è possibile, si dice che i vettori in esame sono linearmente indipendenti.

Una definizione equivalente (che viene usata in pratica per verificare la dipendenza o l'indipendenza lineare) è quella in base alla quale i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \qquad \text{con almeno un } c_i \neq 0$$

mentre i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli, cioè si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \qquad \text{solo quando } c_i = 0 \quad \forall i$$

(si può notare che questa soluzione esiste sempre, poiché è evidente che una combinazione lineare di vettori a coefficienti tutti nulli è sempre uguale al vettore nullo).

Esempio 6.5 *Dato il vettore* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *calcolare la sua norma.*

Si ha in questo caso:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

che rappresenta la norma del vettore.

Esempio 6.6 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e gli scalari* $\alpha = 2$ *e* $\beta = -1$ *determinare la combinazione lineare* $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$.

Si ha in questo caso:

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la combinazione lineare $2\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Esempio 6.7 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *stabilire se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti.*

Si ha in questo caso:

$$c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

cioè si considera la generica combinazione lineare dei 2 vettori e la si uguaglia al vettore nullo. Svolgendo i calcoli si ottiene poi:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui si deve avere:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

e poiché l'unica combinazione lineare dei 2 vettori che fornisce il vettore nullo è quella con coefficienti nulli, i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

Esempio 6.8 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *stabilire se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti.*

Si ha in questo caso:

$$c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} + c_3\mathbf{z} = \mathbf{0} \qquad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \\ -c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui si deve avere:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3 \\ c_2 = c_3 \\ c_2 = c_3 \end{cases} \qquad \text{con } c_3 \in \mathbb{R}$$

Tutte le combinazioni lineari dei 3 vettori con coefficienti $(-2c_3, c_3, c_3)$, dove $c_3 \in \mathbb{R}$, sono uguali al vettore nullo, e poiché ce ne sono anche con coefficienti non tutti nulli (basta prendere $c_3 \neq 0$) i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

6.3. Matrici: definizioni e proprietà

Si chiama matrice una tabella di numeri reali, che si indica con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

e risulta essere una matrice con m righe e n colonne, la quale può anche essere rappresentata in forma compatta nel modo seguente:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

Una matrice di dimensione $m \times n$, inoltre, può essere ottenuta sovrapponendo m vettori riga di $\mathbb{R}^n$, per cui si può usare una scrittura di questo tipo:

$$A = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{array} \right) \\ ... \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array} \right) \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ ... \\ \mathbf{a}^m \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{a}^i \in \mathbb{R}^n \\ \\ i = 1, 2, ..., m \end{array}$$

oppure può essere ottenuta affiancando n vettori colonna di $\mathbb{R}^m$, per cui si può usare una scrittura di questo tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{b}^n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{b}^j \in \mathbb{R}^m \\ \\ j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

L'insieme delle matrici con componenti reali e aventi m righe e n colonne si indica con $\mathbb{R}^{m,n}$, e i vettori possono essere visti come particolari matrici, aventi una sola colonna (nel caso di vettori colonna, che quindi possono essere indicati in generale con $\mathbb{R}^{m,1}$) oppure una sola riga (nel caso di vettori riga, che quindi possono essere indicati in generale con $\mathbb{R}^{1,n}$).

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

si chiama trasposta di A la matrice $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ data da:

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{j=1,2,...,n \\ i=1,2,...,m}}$$

cioè la matrice che si ottiene da A scambiando tra loro le righe e le colonne. Ad esempio, data la matrice 3×2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la sua trasposta è la matrice 2×3:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha anche $\left(A^T\right)^T = A$, cioè la trasposta della trasposta di una data matrice è la matrice di partenza.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (cioè con lo stesso numero di righe e di colonne) si dice quadrata di ordine n, e gli elementi con indici di riga e di colonna uguali $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ costituiscono la diagonale principale.

Una matrice quadrata che coincide con la sua trasposta, poi, si dice simmetrica, e in essa gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali, si ha quindi:

$$A \text{ simmetrica} \Rightarrow A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$$

La matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ad esempio è simmetrica.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi tutti nulli al di sotto della diagonale principale si chiama triangolare alta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi tutti nulli al di sopra della diagonale principale si chiama triangolare bassa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi qualsiasi lungo la diagonale principale e nulli altrove, inoltre, si chiama matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e infine la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale tutti 1 si chiama matrice unità o matrice identità (di ordine n) e si indica con I_n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

6.4. Operazioni tra matrici

Diventa a questo punto possibile introdurre le operazioni tra matrici, che sono 3 e sono del tutto analoghe a quelle viste per i vettori (in effetti, nel caso particolare in cui le matrici hanno una sola riga oppure una sola colonna – per cui sono in realtà dei vettori – le operazioni diventano esattamente quelle introdotte in precedenza con riferimento ai vettori).

6.4.1. Somma di matrici

La prima operazione che si può introdurre è la somma di matrici. Date $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

si chiama somma la matrice $A + B \in \mathbb{R}^{m,n}$ data da:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

cioè la matrice che si ottiene sommando ogni componente della prima matrice con la corrispondente componente della seconda matrice.

6.4.2. Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

La seconda operazione è la moltiplicazione di una matrice per uno scalare (cioè per un numero reale). Dati $c \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

si chiama prodotto della matrice A per lo scalare c la matrice $cA \in \mathbb{R}^{m,n}$ data da:

$$cA = (ca_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

cioè la matrice che si ottiene moltiplicando ogni componente della matrice di partenza per lo scalare.

6.4.3. Prodotto di matrici

La terza operazione è il prodotto di matrici. Date $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ ... \\ \mathbf{a}^m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{b}^p \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,p}$ data da:

$$C = AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^p \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^p \\ ... & & & \\ \mathbf{a}^m\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^p \end{bmatrix}$$

Usando una diversa notazione si ha che, date $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}} \qquad B = (b_{jr})_{\substack{j=1,2,...,n \\ r=1,2,...,p}}$$

si chiama prodotto la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,p}$ data da:

$$C = (c_{ir})_{\substack{i=1,2,...,m \\ r=1,2,...,p}}$$

dove:

$$c_{ir} = a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + ... + a_{in}b_{nr} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}$$

cioè il generico elemento di posto (i, r) della matrice prodotto è uguale al prodotto scalare dell'i-esima riga della prima matrice con la r-sima colonna della seconda matrice.

Affinché sia definito il prodotto tra due matrici, quindi, è necessario che il numero delle colonne della prima matrice sia uguale al numero delle righe della seconda matrice; in questo caso il prodotto è una matrice che ha lo stesso numero di righe della prima matrice e lo stesso numero di colonne della seconda matrice. In particolare, poi, il prodotto tra una matrice $1 \times n$ (un vettore riga ad n componenti) e una matrice $n \times 1$ (un vettore colonna ad n componenti) è un numero, ed è il prodotto scalare introdotto in precedenza.

Il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa (cambiando l'ordine dei fattori il prodotto può addirittura non essere più definito, e comunque se anche lo è in generale si ha $AB \neq BA$), inoltre (come già visto per il prodotto scalare) non vale la legge di annullamento (il prodotto di due matrici, di cui una delle due è la matrice nulla – cioè con elementi tutti uguali a zero – è la matrice nulla, tuttavia un prodotto tra matrici può essere nullo senza che nessuno dei fattori sia la matrice nulla).

Esempio 6.9 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *calcolare la loro somma.*

Si ha in questo caso:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la somma delle due matrici.

Esempio 6.10 *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e lo scalare* $c = 2$ *calcolare il prodotto* cA.

Si ha in questo caso:

$$cA = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che rappresenta il prodotto $2A$.

Esempio 6.11 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *calcolare il prodotto* $C = AB$.

In questo caso poiché $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ e $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ il prodotto AB esiste (perché il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda) – mentre non esiste il prodotto BA – e si ha $C = AB \in \mathbb{R}^{2,3}$ con:

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -7 & -6 \\ 2 & -11 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

che rappresenta il prodotto AB.

Esempio 6.12 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *calcolare il prodotto* AB *e il prodotto* BA.

In questo caso poiché $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ e $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ esistono sia il prodotto AB sia il prodotto BA e si ha $AB \in \mathbb{R}^{2,2}$ e $BA \in \mathbb{R}^{2,2}$ con:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

da cui risulta evidente che non vale la proprietà commutativa del prodotto tra matrici (infatti $AB \neq BA$) e non vale la legge di annullamento del prodotto (infatti BA è uguale alla matrice nulla senza che nessuna delle due matrici A e B sia la matrice nulla).

6.5. Esercizi da svolgere

Confrontare (se possibile) i vettori x e y:

1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dati i vettori x e y calcolare la loro somma, il loro prodotto scalare e il prodotto $2x$:

6) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

8) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

10) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcolare per quale valore del parametro $\alpha \in R$ i vettori x e y sono ortogonali. Posto $\alpha = 1$, poi, calcolare la norma dei vettori x e y:

11) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

12) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

13) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

14) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

15) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Stabilire se i vettori dati sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti:

16) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

17) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

18) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in R$ i vettori dati sono linearmente dipendenti e per quali valori sono linearmente indipendenti:

19) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

20) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

Date le matrici A e B, calcolare la loro somma e il prodotto $-2A$:

21) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

22) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

23) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

24) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

25) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Date le matrici A e B, calcolare il prodotto AB e il prodotto BA:

26) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

28) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

29) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Capitolo 7

Funzioni di più variabili

7.1. Definizioni e dominio

Nei Capitoli precedenti sono state esaminate le funzioni reali di variabile reale, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x)$$

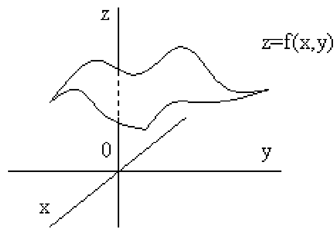
le quali sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e assumono valori in $\mathbb{R}$. A questo punto è possibile introdurre alcuni concetti relativi alle funzioni reali di più variabili reali, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

le quali sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e assumono valori in $\mathbb{R}$. In particolare, si possono prendere in esame funzioni reali di 2 variabili reali, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2) \text{ oppure } z = f(x, y)$$

Come per le funzioni reali di variabile reale, anche per le funzioni reali di più variabili reali il punto di partenza è costituito dalla determinazione del dominio (o campo di esistenza). Valgono a questo proposito le stesse regole viste per le funzioni di una variabile (il denominatore di una frazione non può essere nullo, il radicando di una radice ad indice pari deve essere non negativo, l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo, la base di una potenza con base ed esponente variabili deve essere strettamente positiva), tenendo presente che in questo caso vi sono n variabili indipendenti. Considerando le funzioni di 2 variabili, inoltre, è possibile la rappresentazione grafica del dominio (che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, eventualmente coincidente con $\mathbb{R}^2$). Per queste funzioni è anche possibile una rappresentazione grafica delle funzioni stesse (nello spazio tridimensionale, cioè in $\mathbb{R}^3$, anche se in genere non è agevole individuare il grafico di una funzione di questo tipo), mentre ciò non è più possibile quando si considerano funzioni di n variabili con $n > 2$.



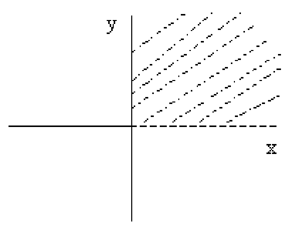
Esempio 7.1 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

In questo caso ogni radicando deve essere non negativo, quindi si deve avere $x \geq 0$ e $y \geq 0$, inoltre il denominatore della frazione deve essere diverso da 0 (il che accade quando $y \neq 0$), per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y > 0\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che appartengono al primo quadrante, con l'esclusione di quelli che si trovano sul semiasse positivo delle ascisse.

Esempio 7.2 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

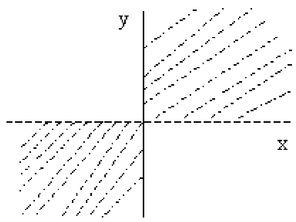
In questo caso il radicando deve essere non negativo, quindi si deve avere $\dfrac{x}{y} \geq 0$, il che accade quando si ha:

$$(x \geq 0 \ \wedge \ y > 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge \ y < 0)$$

per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \geq 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \ \wedge \ y > 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge \ y < 0)\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che appartengono al primo e al terzo quadrante del piano cartesiano, con l'esclusione di quelli che si trovano sull'asse delle ascisse.

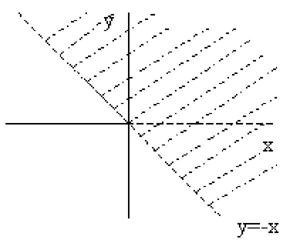
Esempio 7.3 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x, y) = \log(x + y)$$

In questo caso l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, quindi si deve avere $x+y > 0$, il che accade quando $y > -x$, per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che si trovano nel semipiano al di sopra della retta di equazione $y = -x$ (la bisettrice del secondo e del quarto quadrante), esclusi i punti che appartengono alla retta stessa.

Esempio 7.4 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$$

In questo caso l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, quindi si deve avere $x^2 - y^2 > 0$, e perciò:

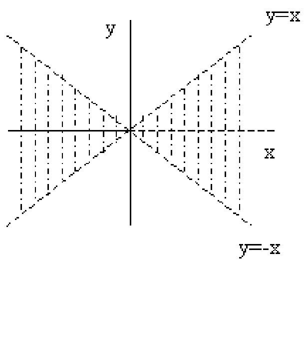
$$x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases} \vee \begin{cases} y > x \\ y < -x \end{cases}$$

per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x < y < x) \ \ \vee \ \ (x < y < -x)\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che sono compresi tra le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ (le bisettrici del primo e terzo e del secondo e quarto quadrante), esclusi i punti che appartengono alle rette stesse.

7.2. Derivate parziali, differenziale, piano tangente

Anche per le funzioni di più variabili è possibile introdurre le nozioni di derivata e differenziale, e poiché in questo caso si hanno più variabili indipendenti vi sono più derivate dello stesso ordine, che vengono dette derivate parziali.

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e dato un punto (x_0, y_0) interno a X, si definisce derivata parziale di f rispetto alla variabile x in (x_0, y_0) (e si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oppure con $f_x(x_0, y_0)$ oppure con $D_x f(x_0, y_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto (x_0, y_0) incrementando la sola variabile x, purché questo limite esista finito:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

In modo analogo si definisce derivata parziale di f rispetto alla variabile y in (x_0, y_0) (e si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oppure con $f_y(x_0, y_0)$ oppure con $D_y f(x_0, y_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto (x_0, y_0) incrementando la sola variabile y, purché questo limite esista finito:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si possono poi definire le derivate parziali seconde, costruite con un procedimento analogo a quello appena descritto partendo dalle derivate parziali prime. Le derivate parziali seconde risultano essere 4 e vengono denotate con i simboli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

oppure:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \qquad f_{xy}(x_0, y_0) \qquad f_{yx}(x_0, y_0) \qquad f_{yy}(x_0, y_0)$$

o anche:

$$D_{xx} f(x_0, y_0) \qquad D_{xy} f(x_0, y_0) \qquad D_{yx} f(x_0, y_0) \qquad D_{yy} f(x_0, y_0)$$

dove f_{xx} e f_{yy} vengono dette derivate seconde pure (in particolare f_{xx} si ottiene partendo da f_x e derivandola ancora rispetto ad x, mentre f_{yy} si ottiene partendo da

f_y e derivandola ancora rispetto a y), mentre f_{xy} e f_{yx} vengono dette derivate seconde miste (in particolare f_{xy} si ottiene partendo da f_x e derivandola rispetto a y, mentre f_{yx} si ottiene partendo da f_y e derivandola rispetto a x, inoltre se tali derivate sono continue si ha $f_{xy} = f_{yx}$, cioè l'ordine di derivazione è irrilevante).

Le derivate parziali prime possono poi essere raccolte in un vettore (riga) che prende il nome di gradiente della funzione f:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

mentre le derivate parziali seconde possono essere raccolte in una matrice (quadrata e simmetrica) che prende il nome di matrice hessiana della funzione f:

$$\bigtriangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nella pratica, per il calcolo delle derivate parziali di una funzione di più variabili non si usa la definizione (come già si è visto per le derivate delle funzioni reali di variabile reale) ma si usano le regole valide per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile, tenendo presente che, quando si deriva rispetto ad una variabile, le altre variabili vanno considerate come costanti.

Esempio 7.5 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x,y) = 3xy^2$$

e valutarli nel punto $P = (0, 2)$.

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono (tenendo presente che quando si deriva rispetto ad x la y va considerata come costante e quando si deriva rispetto ad y la x va considerata come costante):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 \cdot 1 = 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cdot 2y = 6xy$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

In particolare, poi, nel punto $P = (0,2)$ il gradiente è:

$$\nabla f(0,2) = (12 \quad 0)$$

mentre la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.6 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x,y) = 2x^3(x-3y)$$

e valutarli nel punto $P = (1,0)$.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$f(x,y) = 2x^4 - 6x^3y$$

dopodiché le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 18x^2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^3$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 36xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -18x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x^3 - 18x^2y & -6x^3 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 36xy & -18x^2 \\ -18x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare, poi, nel punto $P = (1, 0)$ il gradiente è:

$$\bigtriangledown f(1,0) = (8 \qquad -6)$$

mentre la matrice hessiana è:

$$\bigtriangledown^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 24 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.7 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x,y) = x \log y + xy$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log y + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} + x$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y} + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \left(\log y + y \qquad \frac{x}{y} + x\right)$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\bigtriangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{y} + 1 \\ & \\ \dfrac{1}{y} + 1 & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Esempio 7.8 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x, y) = x^y$$

In questo caso occorre innanzitutto riscrivere la funzione nel modo seguente:

$$f(x, y) = x^y = e^{y \log x}$$

dopodiché le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \log x} \cdot \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \log x} \cdot \log x$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \log x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x} \cdot e^{y \log x} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x^2} \cdot e^{y \log x} \cdot (y-1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{y \log x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x} \cdot e^{y \log x} \cdot \log x = \frac{1}{x} \cdot e^{y \log x} \cdot (1 + y \log x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \log x \cdot e^{y \log x} \cdot \log x = e^{y \log x} \cdot \log^2 x$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \left(e^{y \log x} \cdot \frac{y}{x} \qquad e^{y \log x} \cdot \log x\right)$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\bigtriangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} \cdot e^{y \log x} \cdot (y-1) & \frac{1}{x} \cdot e^{y \log x} \cdot (1 + y \log x) \\ \frac{1}{x} \cdot e^{y \log x} \cdot (1 + y \log x) & e^{y \log x} \cdot \log^2 x \end{pmatrix}$$

Come è stato visto nel Capitolo 4, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè $y = f(x)$, si definisce differenziale della funzione nel punto x_0 l'espressione:

$$dy = f'(x_0)dx$$

È inoltre possibile scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione in corrispondenza del punto x_0 (che, vicino a questo punto, costituisce una buona approssimazione della funzione stessa), data da:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

In modo del tutto analogo, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cioè $z = f(x, y)$, si definisce differenziale totale della funzione nel punto (x_0, y_0) l'espressione:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

(mentre ciascuno dei due termini $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$ costituisce un differenziale parziale, il primo rispetto alla variabile x e il secondo rispetto alla variabile y). In questo caso, inoltre, una buona approssimazione della funzione vicino al punto (x_0, y_0) è costituita dal piano tangente alla funzione in corrispondenza di questo punto, e l'equazione di tale piano tangente è:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Esempio 7.9 *Data la funzione:*

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

scrivere l'espressione del suo differenziale totale, valutarlo in corrispondenza del punto $P = (1, 2)$ e determinare l'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza di questo punto.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

e il differenziale totale di f è dato da:

$$dz = -2xdx - 2ydy$$

mentre in corrispondenza del punto $P = (1, 2)$ tale differenziale vale:

$$dz = -2dx - 4dy$$

L'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza del punto P, poi, è data da:

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

e poiché si ha:

$$f(1, 2) = -2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -4$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} z &= -2 - 2(x-1) - 4(y-2) = -2 - 2x + 2 - 4y + 8 = \\ &= 8 - 2x - 4y \end{aligned}$$

per cui l'equazione del piano tangente nel punto $P = (1, 2)$ è $z = 8 - 2x - 4y$.

Esempio 7.10 *Data la funzione:*

$$f(x, y) = e^x + y^2$$

scrivere l'espressione del suo differenziale totale, valutarlo in corrispondenza del punto $P = (0, 1)$ e determinare l'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza di questo punto.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

e il differenziale totale di f è dato da:

$$dz = e^x dx + 2y dy$$

mentre in corrispondenza del punto $P = (0, 1)$ tale differenziale vale:

$$dz = dx + 2dy$$

L'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza dal punto P, poi, è data da:

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1)$$

e poiché si ha:

$$f(0, 1) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} z &= 2 + 1(x - 0) + 2(y - 1) = 2 + x + 2y - 2 = \\ &= x + 2y \end{aligned}$$

per cui l'equazione del piano tangente nel punto $P = (0, 1)$ è $z = x + 2y$.

7.3. Massimi e minimi liberi

Con riferimento alle funzioni di più variabili un problema di notevole interesse è costituito dall'individuazione di eventuali estremanti (massimi e minimi). In particolare è possibile prendere in esame, relativamente ad una funzione di 2 variabili, la ricerca di massimi e minimi liberi (cioè senza tenere conto di alcun vincolo). A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, con (x_0, y_0) punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$(x_0, y_0) \text{ punto di massimo relativo} \Rightarrow \triangledown f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

$$(x_0, y_0) \text{ punto di minimo relativo} \Rightarrow \triangledown f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \\ \\ \det \triangledown^2 f(x_0, y_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \\ \\ \det \triangledown^2 f(x_0, y_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di minimo relativo}$$

$$\det \triangledown^2 f(x_0, y_0) < 0 \quad \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di sella}$$

dove, data la matrice hessiana della funzione f:

$$\triangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

si definisce determinante di tale matrice l'espressione:

$$\det \triangledown^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

costituita dalla differenza tra il prodotto dei due termini che si trovano sulla diagonale principale e il prodotto dei due termini che si trovano sulla diagonale secondaria.

In pratica, per individuare la presenza di eventuali massimi o minimi liberi di una funzione di 2 variabili si cercano innanzitutto i punti che annullano il gradiente della funzione stessa (e che prendono il nome di punti stazionari), dopodiché si calcolano, in corrispondenza di questi punti, la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e il determinante della matrice hessiana. Se la successione dei segni di queste due quantità è $-$, $+$ si può concludere che ci si trova in presenza di un massimo relativo, se invece è $+$, $+$ si ha un minimo relativo, mentre se il determinante è negativo (indipendentemente dal segno di $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$) si ha un punto di sella (cioè un punto che è un massimo rispetto ad una delle due variabili ed un minimo rispetto all'altra). Nel caso in cui il determinante della matrice hessiana sia uguale a 0 (indipendentemente dal segno di $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$), infine, non si può concludere nulla con certezza.

Esempio 7.11 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

In questo caso si ha innanzitutto che le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\triangledown f(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \\ 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui $A = (0, 0)$ rappresenta l'unico punto stazionario per la funzione in esame.

A questo punto per stabilire la natura del punto stazionario occorre utilizzare le condizioni sufficienti, a questo proposito si ha innanzitutto che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\triangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Questa è anche la matrice hessiana nel punto $A = (0, 0)$, e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \qquad\qquad \det \bigtriangledown^2 f(0,0) = 8$$

il punto $A = (0, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione (mentre non vi sono massimi relativi).

Esempio 7.12 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - x + y$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y + 1$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = -1 \end{cases}$$

per cui $A = \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ e $B = \left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8x \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\bigtriangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ tale matrice è:

$$\bigtriangledown^2 f\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},-1\right) = -4 \qquad \det \nabla^2 f\left(-\frac{1}{2},-1\right) = -4$$

il punto $A = \left(-\frac{1}{2},-1\right)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = \left(\frac{1}{2},-1\right)$ la matrice hessiana invece è:

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2},-1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},-1\right) = 4 \qquad \det \nabla^2 f\left(\frac{1}{2},-1\right) = 4$$

il punto $B = \left(\frac{1}{2},-1\right)$ è un punto di minimo relativo. In conclusione, la funzione ha un minimo relativo e una sella, mentre non ha massimi relativi.

Esempio 7.13 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x,y) = x^3 + y^2 + 4xy$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ \\ 2y + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x = 0 \\ \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(3x-8) = 0 \\ \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ \\ y = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

per cui $A = (0,0)$ e $B = \left(\frac{8}{3},-\frac{16}{3}\right)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\bigtriangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = (0,0)$ tale matrice è:

$$\bigtriangledown^2 f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(0,0) = 0 \qquad \det \bigtriangledown^2 f\,(0,0) = -16$$

il punto $A = (0,0)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = \left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ la matrice hessiana invece è:

$$\bigtriangledown^2 f\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right) = 16 \qquad \det \bigtriangledown^2 f\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right) = 16$$

il punto $B = \left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ è un punto di minimo relativo. In conclusione, la funzione ha un minimo relativo e una sella, mentre non ha massimi relativi.

Esempio 7.14 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + 12y - y^3$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12 - 3y^2$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \\ 12 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ \\ y = 2 \end{cases}$$

per cui $A = (-1,-2)$, $B = (-1,2)$, $C = (1,-2)$ e $D = (1,2)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = (-1,-2)$ tale matrice è:

$$\nabla^2 f\,(-1,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-1,-2) = -2 \qquad \det \nabla^2 f\,(-1,-2) = -24$$

il punto $A = (-1,-2)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = (-1,2)$ la matrice hessiana invece è:

$$\nabla^2 f\,(-1,2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-1,2) = -2 \qquad \det \nabla^2 f(-1,2) = 24$$

il punto $B = (-1,2)$ è un punto di massimo relativo.

Nel punto $C = (1,-2)$ poi la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f\,(1,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = 2 \qquad\qquad \det \bigtriangledown^2 f(1,-2) = 24$$

il punto $C = (1,-2)$ è un punto di minimo relativo.

Nel punto $D = (1,2)$ infine la matrice hessiana è:

$$\bigtriangledown^2 f\,(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 2 \qquad\qquad \det \bigtriangledown^2 f(1,2) = -24$$

il punto $D = (-1,2)$ è un punto di sella. In conclusione, la funzione ha un minimo relativo, un massimo relativo e due selle.

7.4. Esercizi da svolgere

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

2) $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$

3) $f(x,y) = \log(xy)$

4) $f(x,y) = \log x \cdot \log y$

5) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\log(xy)}$

6) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} + \sqrt{x^2+y^2}$

7) $f(x,y) = \log\sqrt{\dfrac{x^2}{y}}$

8) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

9) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2 y}$

10) $f(x,y) = \dfrac{\log(xy)}{xy}$

Determinare il gradiente e la matrice hessiana delle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ *indicato:*

11) $f(x,y) = \log(x+y)$ con $P = (1,0)$

12) $f(x,y) = \dfrac{6}{x} + xy$ con $P = (1,0)$

13) $f(x,y) = e^x + e^y$ con $P = (1,1)$

14) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ con $P = (2,2)$

15) $f(x,y) = y^{\log x}$ con $P = (1,1)$

Determinare il differenziale totale delle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ *indicato:*

16) $f(x,y) = e^x + 2y$ con $P = (0,1)$

17) $f(x,y) = \log(xy) + e^{x+y}$ con $P = (2,-2)$

18) $f(x,y) = e^x + e^y$ con $P = (0,1)$

19) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ con $P = (3,4)$

20) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x+y}}$ con $P = (2,2)$

Determinare l'equazione del piano tangente alle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ *indicato:*

21) $f(x,y) = e^x + y^2$ con $P = (0,-1)$

22) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ con $P = (1,3)$

23) $f(x,y) = e^x + e^y$ con $P = (0,0)$

24) $f(x,y) = \log(xy)$ con $P = (1,1)$

25) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ con $P = (1,0)$

Determinare eventuali massimi e minimi delle seguenti funzioni:

26) $f(x,y) = x^3 - 12x - y^2$

27) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - y$

28) $f(x,y) = \left(x^2 - 1\right)(y-1)$

29) $f(x,y) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$

30) $f(x,y) = \log(1 + x + y) - 5x - y^2$

Parte II

Matematica per le Applicazioni Finanziarie

Capitolo 8

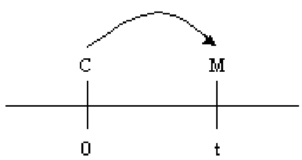
Calcolo finanziario

8.1. Capitalizzazione e attualizzazione

Il calcolo finanziario si occupa dello scambio tra somme di denaro disponibili ad epoche diverse, e prende in esame due tipi di operazioni:

- operazioni di capitalizzazione
- operazioni di attualizzazione

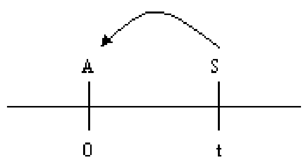
Un'operazione di capitalizzazione può essere considerata come un trasferimento di fondi in avanti nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

$$\begin{aligned} C &= \text{capitale investito (somma impiegata)} \\ M &= \text{montante (somma riscossa)} \\ \frac{M}{C} &= f = \text{fattore di capitalizzazione (o di montante)} \\ M - C &= I = \text{interesse} \end{aligned}$$

Un'operazione di attualizzazione, invece, può essere considerata come un trasferimento di fondi all'indietro nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

$$\begin{aligned} S &= \text{valore nominale (somma futura)} \\ A &= \text{valore attuale (somma immediata)} \\ \frac{A}{S} &= \phi = \text{fattore di attualizzazione o di sconto} \\ S - A &= D = \text{sconto} \end{aligned}$$

Di conseguenza, in un'operazione di capitalizzazione la relazione fondamentale tra capitale investito e montante è:

$$M = C \cdot f$$

e tenendo conto della definizione di interesse si ha anche:

$$I = M - C = C \cdot f - C = C \cdot (f - 1)$$

In un'operazione di attualizzazione, invece, la relazione fondamentale tra valore attuale e valore nominale è:

$$A = S \cdot \phi$$

e tenendo conto della definizione di sconto si ha anche:

$$D = S - A = S - S \cdot \phi = S \cdot (1 - \phi)$$

8.2. Regimi finanziari e leggi finanziarie

I fattori di scambio f e ϕ sopra introdotti vengono detti fattori finanziari. In genere, essi sono funzione del tempo t e di un parametro α o β (che prende il nome di tasso di interesse o tasso di sconto), per cui possono essere indicati con $f(t,\alpha)$ e $\phi(t,\beta)$. Queste funzioni individuano i cosiddetti regimi finanziari (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione), mentre fissando il valore del parametro α o β si ottengono funzioni che dipendono solo dal tempo, $f(t)$ e $\phi(t)$, le quali individuano le cosiddette leggi finanziarie (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione).

Due fattori finanziari f e ϕ si dicono coniugati quando vale la relazione:

$$f \cdot \phi = 1$$

dalla quale si ottiene anche:

$$f = \frac{1}{\phi} \qquad \phi = \frac{1}{f}$$

Si definisce poi tasso di interesse l'interesse prodotto da una somma unitaria (ad esempio 1 €) investita per un intervallo di tempo (il primo, quello che va da $t = 0$ a $t = 1$) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$i = 1 \cdot f(1) - 1 = \text{tasso di interesse}$$

mentre si definisce tasso di sconto il compenso trattenuto da chi anticipa una somma unitaria (ad esempio 1 €) che scade dopo un intervallo di tempo (il primo, quello che va da $t = 0$ a $t = 1$) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$d = 1 - 1 \cdot \phi(1) = \text{tasso di sconto}$$

Da queste definizioni si ricava:

$$f(1) = 1 + i \qquad \phi(1) = 1 - d$$

e nel caso di fattori finanziari coniugati si ha la relazione:

$$f(1) \cdot \phi(1) = 1$$

che può essere scritta nella forma:

$$(1 + i) \cdot (1 - d) = 1$$

dalla quale si ottiene:

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d}$$

che sono le relazioni che legano tasso di interesse i e tasso di sconto d (relativi a fattori finanziari coniugati).

I fattori finanziari f e ϕ possono essere calcolati in base ad opportune convenzioni, dando origine a diversi regimi finanziari. In particolare, i regimi finanziari usuali sono 3:

- regime della capitalizzazione semplice (o dello sconto razionale)
- regime della capitalizzazione composta (o dello sconto composto)
- regime della capitalizzazione a interessi semplici anticipati (o dello sconto commerciale)

8.2.1. Capitalizzazione semplice

Il regime della capitalizzazione semplice è caratterizzato dal fatto che gli interessi sono proporzionali al capitale investito C e alla durata t dell'operazione, cioè si ha:

$$\frac{I}{Ct} = \alpha \Rightarrow I = Ct\alpha$$

dove α è una costante di proporzionalità (positiva). Ponendo $C = 1$ e $t = 1$ si ottiene:

$$I = \alpha$$

e quindi α rappresenta l'interesse prodotto da una somma unitaria investita per un intervallo di tempo di durata unitaria, cioè rappresenta il tasso di interesse (semplice) i. Si ha allora:

$$I = Cti$$

e poi anche:

$$M = C + I = C + Cti = C(1 + it)$$

da cui:

$$f(t, i) = 1 + it \qquad \phi(t, i) = \frac{1}{1 + it}$$

dove $f(t, i)$ è il fattore di capitalizzazione che individua il regime della capitalizzazione semplice mentre $\phi(t, i)$ è il fattore di attualizzazione coniugato di $f(t, i)$ ed individua il regime dello sconto razionale (o sconto semplice). Il tasso i rappresenta il tasso di interesse semplice, ed assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse semplice $f(t)$ e la legge di sconto razionale $\phi(t)$ a quel determinato tasso di interesse.

Se il tasso i è un tasso di interesse annuo, poi, il tasso di interesse periodale i_m (relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$) può essere ricavato tenendo presente che deve valere la seguente uguaglianza tra i fattori di capitalizzazione con tasso annuo e con tasso periodale:

$$1 + it = 1 + i_m mt$$

dove nel fattore di capitalizzazione con tasso periodale la durata dell'impiego è pari a mt poiché si deve avere corrispondenza tra tasso e unità di tempo (per cui, essendo il tasso relativo al periodo $\frac{1}{m}$ di anno, anche il tempo deve essere espresso in m-simi di anno). Si ottiene allora:

$$i_m = \frac{i}{m} \qquad\qquad i = m \cdot i_m$$

e i tassi i ed i_m si dicono tassi equivalenti (in regime di capitalizzazione semplice).

Esempio 8.1 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 10000 € *per* 15 *mesi, in regime di interessi semplici, al tasso annuo del* 10%.

Si ha in questo caso:

$$M = C(1 + it)$$

e poi (tenendo presente che deve esserci corrispondenza tra tasso e tempo di impiego – per cui, essendo il tasso annuo, anche il tempo deve essere espresso in anni –):

$$M = 10000\left(1 + 0.10 \cdot \frac{15}{12}\right) = 10000 \cdot 1.125 = 11250$$

che rappresenta il montante cercato.

Esempio 8.2 *Calcolare il valore attuale della somma di* 15000 € *disponibile tra* 8 *mesi, in regime di sconto semplice, con tasso annuo di interesse del* 6%.

Si ha in questo caso:

$$A = \frac{S}{1 + it}$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$A = \frac{15000}{1 + 0.06 \cdot \frac{8}{12}} = \frac{15000}{1.04} = 14423.08$$

che rappresenta il valore attuale cercato.

Esempio 8.3 *Calcolare, in regime di interessi semplici, il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del* 16%.

Si ha in questo caso:

$$i_m = \frac{i}{m}$$

e poi (osservando che il tasso trimestrale si riferisce ad $\frac{1}{4}$ di anno, per cui viene indicato con i_4):

$$i_4 = \frac{i}{4} \Rightarrow i_4 = \frac{0.16}{4} = 0.04$$

cioè il tasso di interesse trimestrale semplice equivalente al tasso annuo del 16% è pari al 4%.

Esempio 8.4 *Volendo impiegare la somma di* 5000 € *in regime di interessi semplici per un periodo di* 2 *anni, stabilire se è più conveniente effettuare l'impiego al tasso trimestrale del* 3% *oppure al tasso quadrimestrale del* 3.5%.

Effettuando l'impiego al tasso trimestrale del 3% il montante al termine dei 2 anni è (esprimendo il tempo in trimestri):

$$M = 5000\,(1 + 0.03 \cdot 8) = 6200$$

mentre effettuando l'impiego al tasso quadrimestrale del 3.5% il montante al termine dei 2 anni è (esprimendo il tempo in quadrimestri):

$$M' = 5000(1 + 0.035 \cdot 6) = 6050$$

e poiché $M > M'$ è più conveniente l'impiego al tasso trimestrale del 3%.

Lo stesso risultato può essere ottenuto (senza calcolare il valore del montante) osservando che il tasso annuo equivalente al tasso trimestrale del 3% è:

$$i = m \cdot i_m \Rightarrow i = 4 \cdot i_4 = 4 \cdot 0.03 = 0.12$$

mentre il tasso annuo equivalente al tasso quadrimestrale del 3.5% è:

$$i' = m' \cdot i_{m'} \Rightarrow i' = 3 \cdot i_3 = 3 \cdot 0.035 = 0.105$$

e poiché $i > i'$ è più conveniente l'impiego al tasso trimestrale del 3%.

8.2.2. Capitalizzazione composta

Il regime della capitalizzazione composta è caratterizzato dal fatto che gli interessi maturati in un periodo (attraverso il regime della capitalizzazione semplice) diventano capitale e, a loro volta, producono interessi a partire dal periodo successivo. Considerando intervalli di tempo di lunghezza unitaria il montante dopo un periodo è quindi:

$$M = C(1+i)$$

mentre dopo 2 periodi (tenendo presente che il montante del periodo precedente diventa il nuovo capitale) è:

$$M = [C\,(1+i)]\,(1+i) = C(1+i)^2$$

e, in generale, dopo t periodi è pari a:

$$M = C(1+i)^t$$

Si ha allora:

$$f(t,i) = (1+i)^t \qquad \phi(t,i) = (1+i)^{-t}$$

dove $f(t,i)$ è il fattore di capitalizzazione che individua il regime della capitalizzazione composta mentre $\phi(t,i)$ è il fattore di attualizzazione coniugato di $f(t,i)$ ed individua il regime dello sconto composto. Il tasso i rappresenta il tasso di interesse composto, e può essere interpretato come tasso di interesse semplice con la convenzione che, alla fine di ogni periodo (cioè di ogni anno), gli interessi vengono capitalizzati. Anche in questo caso assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse composto $f(t)$ e la legge di sconto composto $\phi(t)$ a quel determinato tasso di interesse.

Se i è un tasso di interesse annuo, poi, il tasso di interesse periodale i_m (relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$) può essere ricavato tenendo presente che deve valere la seguente uguaglianza tra i fattori di capitalizzazione con tasso annuo e con tasso periodale:

$$(1+i)^t = (1+i_m)^{mt}$$

da cui si ottiene:

$$i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1 \qquad i = (1+i_m)^m - 1$$

e i tassi i ed i_m si dicono tassi equivalenti (in regime di capitalizzazione composta). In questo caso si introduce inoltre un nuovo tasso, il tasso annuo nominale convertibile m volte l'anno j_m, che si ottiene semplicemente moltiplicando il tasso periodale per il numero dei periodi:

$$j_m = m \cdot i_m$$

Le formule di passaggio tra i (che viene anche detto tasso annuo effettivo, per distinguerlo dal tasso annuo nominale) e j_m si ottengono da quelle di passaggio tra i ed i_m sostituendo a i_m il rapporto $\dfrac{j_m}{m}$, e sono date da:

$$j_m = m\left[\sqrt[m]{1+i} - 1\right] \qquad\qquad i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$$

Utilizzando il tasso j_m il fattore di capitalizzazione diventa:

$$f(t, j_m) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mt}$$

e ponendo $j_m = \delta$ e facendo tendere m a $+\infty$ (cioè considerando intervalli la cui ampiezza $\dfrac{1}{m}$ tende a 0, il che significa che la capitalizzazione avviene ogni istante) si ottiene:

$$f(t, \delta) = \lim_{m\to+\infty}\left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{mt} = e^{\delta t}$$

che rappresenta il fattore di montante nel caso di capitalizzazione continua (o istantanea). Il tasso nominale δ si chiama tasso istantaneo di interesse (o intensità istantanea di interesse, o forza di interesse) e il legame con il tasso annuo effettivo i si ottiene uguagliando i fattori di capitalizzazione con tasso annuo (assumendo la cosiddetta "convenzione esponenziale", per cui il fattore di montante $(1+i)^t$ viene utilizzato anche per periodi di tempo t non interi) e con tasso istantaneo, cioè:

$$(1+i)^t = e^{\delta t}$$

da cui:

$$\delta = \log(1+i) \qquad\qquad i = e^{\delta} - 1$$

Esempio 8.5 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando per* 5 *anni la somma di* 1000 €*, in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo dell'*8%*.*

Si ha in questo caso:

$$M = C(1+i)^t$$

e poi:

$$M = 1000(1+0.08)^5 = 1000 \cdot 1.46933 = 1469.33$$

che rappresenta il montante cercato.

Esempio 8.6 *Calcolare il valore attuale della somma di* 500 € *disponibile tra* 3 *anni e* 4 *mesi in regime di interessi composti con tasso annuo del* 9%.

Si ha in questo caso (assumendo la convezione esponenziale, per cui il fattore di sconto $(1+i)^{-t}$ viene utilizzato anche per periodi di tempo t non interi):

$$A = S(1+i)^{-t}$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$A = 500(1+0.09)^{-\left(3+\frac{4}{12}\right)} = 500 \cdot (1.09)^{-3.33} = 500 \cdot 0.75031 = 375.16$$

che rappresenta il valore attuale cercato.

Esempio 8.7 *Calcolare, in regime di interessi composti, il tasso annuo effettivo ed il tasso annuo nominale convertibile* 12 *volte l'anno equivalenti al tasso mensile dell'*1%.

Si ha in questo caso:

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad j_m = m \cdot i_m$$

e poi:

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 \Rightarrow i = (1+0.01)^{12} - 1 = 0.1268$$

$$j_{12} = 12 \cdot i_{12} \Rightarrow j_{12} = 12 \cdot 0.01 = 0.12$$

cioè il tasso annuo effettivo equivalente al tasso mensile dell'1% è pari al 12.68% e il tasso annuo nominale convertibile 12 volte l'anno equivalente al tasso mensile dell'1% è pari al 12%.

Esempio 8.8 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 2000 € *per* 2 *anni e* 10 *mesi al tasso annuo del* 5% *utilizzando la capitalizzazione continua.*

Si ha in questo caso:

$$M = Ce^{\delta t} \qquad \text{con } \delta = \log(1+i)$$

e poi:

$$\delta = \log(1+0.05) = 0.04879$$

e infine:

$$M = 2000 \cdot e^{0.04879 \cdot \left(2+\frac{10}{12}\right)} = 2000 \cdot e^{0.138238} = 2000 \cdot 1.148249 = 2296.50$$

che rappresenta il montante cercato.

8.2.3. Capitalizzazione a interessi semplici anticipati

Il regime della capitalizzazione a interessi semplici anticipati viene definito come coniugato del regime dello sconto commerciale. Quest'ultimo è caratterizzato dal fatto che lo sconto è proporzionale al valore nominale S e alla durata t dell'operazione, cioè si ha:

$$\frac{D}{St} = \alpha \Rightarrow D = St\alpha$$

dove α è una costante di proporzionalità (positiva). Ponendo $S = 1$ e $t = 1$ si ottiene:

$$D = \alpha$$

e quindi α rappresenta lo sconto applicato ad una somma unitaria che viene anticipata per un intervallo di tempo di durata unitaria, cioè rappresenta il tasso di sconto (commerciale) d. Si ha allora:

$$D = Std$$

e poi anche:

$$A = S - D = S - Std = S(1 - dt) \qquad \text{con } dt < 1 \quad \text{cioè} \quad t < \frac{1}{d}$$

da cui:

$$\phi(t, d) = 1 - dt \qquad\qquad f(t, d) = \frac{1}{1 - dt}$$

dove $\phi(t, d)$ è il fattore di attualizzazione che individua il regime dello sconto commerciale mentre $f(t, d)$ è il fattore di capitalizzazione coniugato di $\phi(t, d)$ ed individua il regime della capitalizzazione ad interessi semplici anticipati. Il tasso d rappresenta il tasso di sconto commerciale, e anche in questo caso assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse semplice anticipato $f(t)$ e la legge di sconto commerciale $\phi(t)$ a quel determinato tasso di sconto. Si deve inoltre tenere presente che questo regime va utilizzato solo per operazioni aventi durata piuttosto breve ($t < \frac{1}{d}$), poiché altrimenti si ottengono montanti o valori attuali negativi (chiaramente privi di significato finanziario).

Se d è il tasso di sconto annuo, poi, il tasso di sconto periodale d_m (relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$) può essere ricavato tenendo presente che deve valere la seguente uguaglianza tra i fattori di attualizzazione con tasso annuo e con tasso periodale:

$$1 - dt = 1 - d_m mt$$

da cui si ottiene:

$$d_m = \frac{d}{m} \qquad\qquad d = m \cdot d_m$$

e i tassi d e d_m si dicono tassi equivalenti (in regime di sconto commerciale).

Esempio 8.9 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 500 € *per* 5 *mesi in regime di interessi semplici anticipati con tasso di sconto del* 7% *annuo.*

Si ha in questo caso:

$$M = \frac{C}{1 - dt}$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$M = \frac{500}{1 - 0.07 \cdot \frac{5}{12}} = \frac{500}{0.97083} = 515.02$$

che rappresenta il montante cercato.

Esempio 8.10 *Calcolare il valore attuale della somma di* 1500 € *disponibile tra* 7 *mesi in regime di sconto commerciale con tasso di sconto del* 5% *annuo.*

Si ha in questo caso:

$$A = S(1 - dt)$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$A = 1500\left(1 - 0.05 \cdot \frac{7}{12}\right) = 1500 \cdot 0.97083 = 1456.25$$

che rappresenta il valore attuale cercato.

Esempio 8.11 *Calcolare il montante tra* 1 *anno e mezzo della somma di* 100 € *in regime di interessi semplici anticipati sapendo che il tasso annuo di interesse è del* 9%.

Si ha in questo caso:

$$M = \frac{C}{1 - dt}$$

e poiché il tasso d che compare nella formula è un tasso di sconto, mentre quello di cui si dispone è un tasso di interesse, occorre innanzitutto determinare d tenendo presente che vale la relazione:

$$d = \frac{i}{1 + i} \Rightarrow d = \frac{0.09}{1.09} = 0.0825$$

e poi:

$$M = \frac{100}{1 - 0.0825 \cdot 1.5} = \frac{100}{0.87614} = 114.14$$

che rappresenta il montante cercato.

Esempio 8.12 *Calcolare, in regime di sconto commerciale, il tasso di sconto bimestrale equivalente al tasso di sconto annuo del* 9%.

Si ha in questo caso:

$$d_m = \frac{d}{m}$$

e poi:

$$d_6 = \frac{d}{6} \Rightarrow d_6 = \frac{0.09}{6} = 0.015$$

cioè il tasso di sconto bimestrale equivalente al tasso annuo del 9% è pari all'1.5%.

8.3. Montanti e valori attuali di più somme, rendite

In alcune situazioni, data una sequenza di somme di denaro:

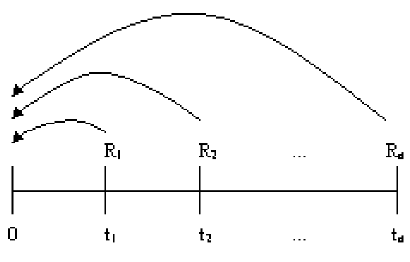
$$R_1, R_2, ..., R_n$$

con scadenze rispettive:

$$t_1, t_2, ..., t_n$$

interessa calcolare il valore attuale complessivo alla data 0, che precede tutte le scadenze, oppure il montante complessivo alla data T, che segue tutte le scadenze. Se le somme da valutare congiuntamente sono tutte dello stesso segno, in particolare, si dice che costituiscono una rendita, e le singole somme si dicono rate o termini della rendita.

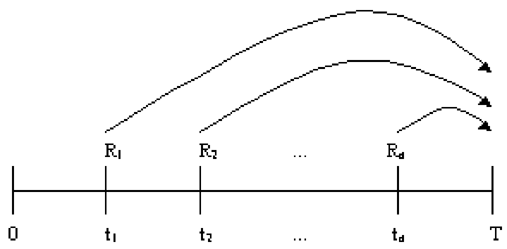
Il valore attuale di una rendita si ottiene sommando i valori attuali delle sue rate, calcolati con fattori di sconto $\phi(t_s)$ che dipendono dalle scadenze delle singole rate:



cioè:

$$A = \sum_{s=1}^{n} R_s \phi(t_s)$$

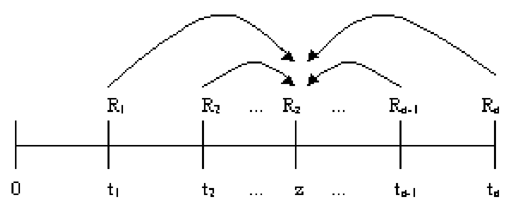
mentre il montante di una rendita si ottiene sommando i montanti delle sue rate, calcolati con fattori di capitalizzazione $f(T - t_s)$ che dipendono dal tempo che intercorre tra le scadenze delle singole rate e la data finale:



cioè:

$$M = \sum_{s=1}^{n} R_s f(T - t_s)$$

Più in generale, è possibile definire il valore di una rendita ad una qualsiasi data z (compresa tra 0 e t_n) come la somma dei montanti delle rate che scadono prima di z e dei valori attuali delle rate che scadono dopo z:



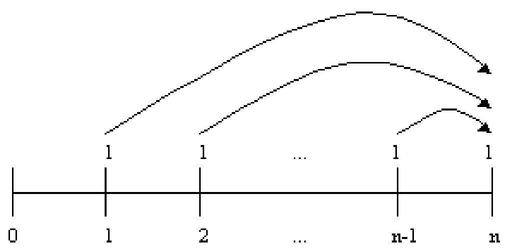
cioè:

$$V = \sum_{t_s \leq z} R_s f(z - t_s) + \sum_{t_s > z} R_s \phi(t_s - z)$$

e il valore attuale e il montante rappresentano casi particolari del valore della rendita (con $z = 0$ nel primo caso e $z = T$ posteriore a tutte le scadenze nel secondo caso).

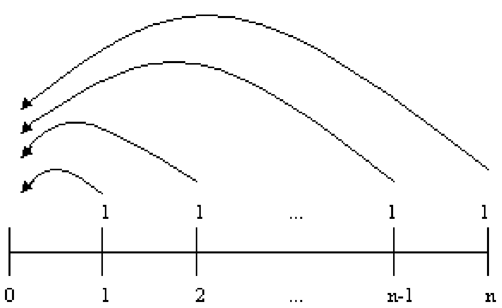
In alcuni casi i calcoli relativi alle rendite possono essere notevolmente semplificati; questo accade in particolare quando le rate sono tutte uguali, le loro scadenze sono periodiche (ad esempio annuali) e il regime finanziario utilizzato è quello della capitalizzazione composta.

In questo contesto è possibile considerare innanzitutto una rendita unitaria con pagamenti che avvengono alla fine di ogni anno per n anni. Si parla allora di rendita annua posticipata unitaria, e il montante alla fine dell'ultimo anno, calcolato a tasso annuo di interesse i, si indica con $s_{n\rceil i}$ (che si legge "s posticipato, figurato n a tasso i") ed è dato da:



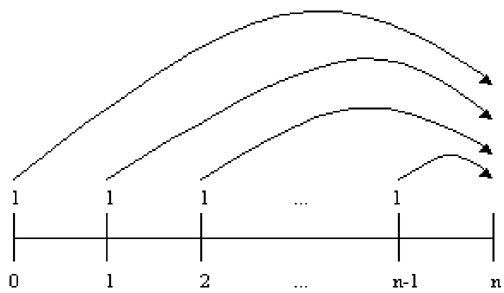
$$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1 = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{n-s} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Per la stessa rendita, il valore attuale all'inizio del primo anno, calcolato a tasso annuo di interesse i, si indica con $a_{n\rceil i}$ (che si legge "a posticipato, figurato n a tasso i") ed è dato da:



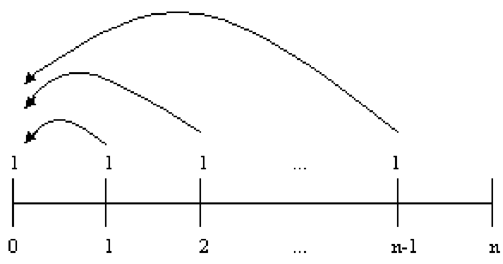
$$a_{n\rceil i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Nel caso di rendita anticipata (per cui i pagamenti vengono effettuati all'inizio anziché alla fine di ogni anno) il montante risulta calcolato un anno dopo il pagamento dell'ultima rata e viene indicato con $\ddot{s}_{n\rceil i}$(che si legge "s anticipato, figurato n a tasso i), pari a:



$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{n\rceil i} &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i) = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{n-s} = \\
&= (1+i) \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1 \right] = \\
&= (1+i) \cdot s_{n\rceil i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{1+i}} = \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{d}
\end{aligned}$$

mentre il valore attuale risulta calcolato al momento del pagamento della prima rata e viene indicato con $\ddot{a}_{n\rceil i}$(che si legge "a anticipato, figurato n a tasso i), pari a:



$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{n\rceil i} &= 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^s} = \\
&= (1+i) \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] = \\
&= (1+i) \cdot a_{n\rceil i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{i}{1+i}} = \\
&= \frac{1-(1+i)^{-n}}{d}
\end{aligned}$$

Nel caso di rate non unitarie ma di ammontare costante pari a R, basta moltiplicare le espressioni $s_{n\rceil i}$ e $a_{n\rceil i}$ (oppure $\ddot{s}_{n\rceil i}$ e $\ddot{a}_{n\rceil i}$ nel caso anticipato) per R, per cui il montante e il valore attuale di una rendita annua posticipata di rata costante R risultano rispettivamente:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i} \qquad \text{e} \qquad A = R \cdot a_{n\rceil i}$$

e analogamente il montante e il valore attuale di una rendita annua anticipata di rata costante R risultano rispettivamente:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i} \qquad \text{e} \qquad A = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$$

È possibile infine considerare il caso di rendite perpetue, per le quali ha senso solo il calcolo del valore attuale (e non del montante). Nel caso di una rendita perpetua unitaria questo valore attuale si ottiene calcolando il limite per $n \to +\infty$ di $a_{n\rceil i}$ (se la rendita è posticipata) oppure di $\ddot{a}_{n\rceil i}$ (se la rendita è anticipata) ed è dato da:

$$a_{\infty\rceil i} = \lim_{n \to +\infty} a_{n\rceil i} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

$$\ddot{a}_{\infty\rceil i} = \lim_{n \to +\infty} \ddot{a}_{n\rceil i} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{d} = \frac{1}{d}$$

mentre nel caso di una rendita perpetua di rata costante R il valore attuale, rispettivamente nel caso posticipato e nel caso anticipato, è dato da:

$$A = R \cdot a_{\infty\rceil i} = \frac{R}{i}$$

$$A = R \cdot \ddot{a}_{\infty\rceil i} = \frac{R}{d}$$

Un ultimo caso è quello delle rendite frazionate, nelle quali cioè le rate sono disponibili in corrispondenza di frazioni di anno (mese, bimestre, trimestre...). In questa situazione è possibile continuare ad utilizzare le formule relative alle rendite annue, tenendo però presente che il tempo va espresso in frazioni di anno ed è necessario usare il corrispondente tasso periodale.

Esempio 8.13 *Calcolare il montante tra* 2 *anni di due versamenti, il primo di* 1000 € *effettuato tra* 6 *mesi e il secondo di* 550 € *effettuato tra* 1 *anno e mezzo, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 5% *(risolvere l'esercizio sia utilizzando il tasso semestrale sia utilizzando il tasso annuo).*

Si ha innanzitutto che il tasso semestrale equivalente al tasso annuo del 5% è:

$$i_2 = \sqrt{1+i} - 1 \Rightarrow i_2 = \sqrt{1.05} - 1 = 0.0247$$

e poi il montante è (usando il tasso semestrale ed esprimendo quindi il tempo in semestri):

$$M = 1000 \cdot (1 + 0.0247)^3 + 550 \cdot (1 + 0.0247) = 1639.51$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il tasso annuo ed esprimendo quindi il tempo in anni, per cui si ha:

$$M = 1000 \cdot (1 + 0.05)^{1.5} + 550 \cdot (1 + 0.05)^{0.5} = 1639.51$$

Esempio 8.14 *Calcolare il valore attuale di due versamenti futuri, il primo di* 3000 € *tra* 1 *anno e* 3 *mesi e il secondo di* 4000 € *tra* 2 *anni e* 6 *mesi, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 10% *(risolvere l'esercizio sia utilizzando il tasso trimestrale sia utilizzando il tasso annuo).*

Si ha innanzitutto che il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del 10% è:

$$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1.1} - 1 = 0.0241$$

e poi il valore attuale è (usando il tasso trimestrale ed esprimendo quindi il tempo in trimestri):

$$A = 3000 \cdot (1 + 0.0241)^{-5} + 4000 \cdot (1 + 0.0241)^{-10} = 5815$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il tasso annuo ed esprimendo quindi il tempo in anni, per cui si ha:

$$\begin{aligned} A &= 3000 \cdot (1 + 0.10)^{-\left(1+\frac{3}{12}\right)} + 4000 \cdot (1 + 0.10)^{-\left(2+\frac{6}{12}\right)} = \\ &= 3000 \cdot (1 + 0.10)^{-1.25} + 4000 \cdot (1 + 0.10)^{-2.5} = 5815 \end{aligned}$$

Esempio 8.15 *Calcolare il valore tra* 2 *anni di due versamenti, il primo di* 1500 ∈ *effettuato subito e il secondo di* 1000 ∈ *effettuato tra* 3 *anni, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 6%.

In questo caso si deve tenere presente che il primo versamento deve essere capitalizzato (per 2 anni), mentre il secondo versamento deve essere attualizzato (per 1 anno), si ha allora:

$$V = 1500 \cdot (1 + 0.06)^2 + 1000 \cdot (1 + 0.06)^{-1} = 2628.80$$

che rappresenta il valore cercato.

Esempio 8.16 *Calcolare il valore tra* 9 *mesi di tre versamenti, il primo di* 500 ∈ *effettuato tra* 2 *mesi, il secondo di* 300 ∈ *effettuato tra* 6 *mesi e il terzo di* 200 ∈ *effettuato tra* 1 *anno, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 7%.

In questo caso si deve tenere presente che i primi due versamenti devono essere capitalizzati (rispettivamente per 7 mesi e per 3 mesi), mentre il terzo versamento deve essere attualizzato (per 3 mesi), si ha allora (esprimendo i tempi in anni, in quanto il tasso di cui si dispone è un tasso annuo):

$$V = 500 \cdot (1 + 0.07)^{\frac{7}{12}} + 300 \cdot (1 + 0.07)^{\frac{3}{12}} + 200 \cdot (1 + 0.07)^{-\frac{3}{12}} = 1021.89$$

che rappresenta il valore cercato.

Esempio 8.17 *Calcolare il valore attuale e il montante di una rendita di* 2000 ∈ *l'anno per* 10 *anni, posticipata, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 10%.

Il valore attuale della rendita è:

$$A = R \cdot a_{n\rceil i} \Rightarrow A = 2000 \cdot a_{10\rceil 0.10} = 2000 \cdot \frac{1 - (1 + 0.10)^{-10}}{0.10} = 12289.13$$

mentre il montante è:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i} \Rightarrow M = 2000 \cdot s_{10\rceil 0.10} = 2000 \cdot \frac{(1 + 0.10)^{10} - 1}{0.10} = 31874.85$$

Esempio 8.18 *Calcolare il valore attuale e il montante di una rendita di* 500 € *l'anno per* 7 *anni, anticipata, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 6%.

Il valore attuale della rendita è:

$$A = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i} \Rightarrow A = 500 \cdot \ddot{a}_{7\rceil 0.06} = 500 \cdot \frac{1-(1+0.06)^{-7}}{\frac{0.06}{1.06}} = 2958.66$$

mentre il montante è:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i} \Rightarrow M = 500 \cdot \ddot{s}_{7\rceil 0.06} = 500 \cdot \frac{(1+0.06)^{7}-1}{\frac{0.06}{1.06}} = 4448.73$$

Esempio 8.19 *Calcolare il valore attuale e il montante di una successione di pagamenti mensili di* 50 € *ciascuno che si cominceranno a ricevere tra* 1 *mese e che dureranno per* 2 *anni, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 9%.

In questo caso si ha una rendita mensile (quindi frazionata), posticipata, è allora possibile continuare ad utilizzare le formule viste per le rendite annue esprimendo però il tempo in mesi ed utilizzando il corrispondente tasso periodale, cioè il tasso mensile. A questo proposito si ha innanzitutto che il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 9% è:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1 \Rightarrow i_{12} = \sqrt[12]{1.09} - 1 = 0.0072$$

e poi il valore attuale è (tenendo presente che le rate sono 24):

$$A = R \cdot a_{n\rceil i_{12}} \Rightarrow A = 50 \cdot a_{24\rceil 0.0072} = 50 \cdot \frac{1-(1+0.0072)^{-24}}{0.0072} = 1098.42$$

mentre il montante è:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i_{12}} \Rightarrow M = 50 \cdot s_{24\rceil 0.0072} = 50 \cdot \frac{(1+0.0072)^{24}-1}{0.0072} = 1304.92$$

Esempio 8.20 *Calcolare il valore attuale e il montante di una successione di* 6 *pagamenti trimestrali anticipati (il primo effettuato subito, l'ultimo tra* 15 *mesi) di* 400 € *ciascuno, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 7%*.*

In questo caso si ha una rendita trimestrale (quindi frazionata), anticipata, è allora necessario esprimere sia il tempo sia il tasso in frazioni di anno (in particolare trimestri). Il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del 7% è:

$$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1.07} - 1 = 0.017$$

e poi il valore attuale è:

$$A = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i_4} \Rightarrow A = 400 \cdot \ddot{a}_{6\rceil 0.017} = 400 \cdot \frac{1-(1+0.017)^{-6}}{\frac{0.017}{1.017}} = 2301.59$$

mentre il montante è:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i_4} \Rightarrow M = 400 \cdot \ddot{s}_{6\rceil 0.017} = 400 \cdot \frac{(1+0.017)^{6}-1}{\frac{0.017}{1.017}} = 2546.92$$

Esempio 8.21 *Calcolare il valore attuale di una rendita perpetua che prevede il pagamento di rate annue di* 300 €*, in regime di interessi composti con tasso annuo del* 5% *(considerare sia il caso di rendita posticipata sia il caso di rendita anticipata).*

Nel caso di rendita posticipata il valore attuale è:

$$A = \frac{R}{i} \Rightarrow A = \frac{300}{0.05} = 6000$$

mentre nel caso di rendita anticipata il valore attuale è:

$$A = \frac{R}{d} \Rightarrow A = \frac{300}{\frac{0.05}{1.05}} = 6300$$

8.4. Esercizi da svolgere

Calcolare i seguenti tassi equivalenti:

1) Il tasso trimestrale e il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente equivalenti al tasso annuo effettivo del 12% in regime di capitalizzazione composta.

2) Il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del 12% in regime di capitalizzazione semplice.

3) Il tasso annuo effettivo equivalente al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 12% in regime di capitalizzazione composta.

4) Il tasso di sconto bimestrale equivalente al tasso di sconto annuo del 12% in regime di capitalizzazione ad interessi semplici anticipati.

5) Il tasso mensile equivalente al tasso bimestrale del 2% in regime di capitalizzazione composta.

6) Il tasso bimestrale equivalente al tasso mensile dell'1% in regime di capitalizzazione semplice.

7) Il tasso quadrimestrale equivalente al tasso annuo del 12% in regime di capitalizzazione semplice.

8) Il tasso semestrale equivalente al tasso annuo effettivo del 12% in regime di capitalizzazione composta.

9) Il tasso annuo effettivo equivalente al tasso semestrale del 6% in regime di capitalizzazione composta.

10) Il tasso di sconto annuo equivalente al tasso di sconto mensile dell'1% in regime di capitalizzazione ad interessi semplici anticipati.

Risolvere i seguenti problemi di capitalizzazione o attualizzazione:

11) Dato un impiego unitario in capitalizzazione semplice al tasso annuo del 10%, determinare il montante dopo 2 anni supponendo che alla fine di ogni anno il 10% degli interessi maturati venga trattenuto a titolo di imposte.

12) Un impiego di liquidità per 6 mesi può essere fatto a interessi semplici, con tasso annuo $i = 20\%$, oppure a interessi composti, con tasso annuo effettivo $j = 20\%$. Determinare il più conveniente tra i due impieghi.

13) Il tesoriere di una società, che deve impiegare per sei mesi una liquidità, prende in esame due alternative: (i) acquisto di uno zero-coupon bond a sei mesi, con rendimento annuo semplice del 14%; (ii) acquisto di uno zero-coupon bond a due mesi, con rendimento annuo semplice del 12%, e reimpiego per il periodo rimanente, sempre a interessi semplici, a tasso annuo j (fissato oggi attraverso un Forward Rate Agreement). Determinare quali tassi j rendono più conveniente il primo impiego.

14) Dato un impiego di ammontare C in capitalizzazione composta per la durata di t anni al tasso semestrale del 5%, determinare il numero di anni necessario affinché il montante risulti pari al doppio della somma impiegata inizialmente.

15) Dato un impiego di ammontare C in capitalizzazione semplice per la durata di t anni al tasso semestrale del 5%, determinare il numero di anni necessario affinché il montante risulti pari al doppio della somma impiegata inizialmente.

16) Dato un impiego di ammontare C in capitalizzazione ad interessi semplici anticipati per la durata di t anni al tasso di sconto annuo del 5%, determinare il numero di anni necessario affinché il montante risulti pari al doppio della somma impiegata inizialmente.

17) Dovendo riscuotere una cambiale di 2000 $\in$ tra 6 mesi ci si rivolge ad un istituto di credito che propone di pagarla subito trattenendo un compenso calcolato al tasso di interesse del 4% annuo. Calcolare la somma ricevuta se si accetta di scontare la cambiale presso l'istituto di credito.

18) Dovendo riscuotere una cambiale di 1000 $\in$ tra 6 mesi ci si rivolge ad un istituto di credito che propone di pagarla subito trattenendo un compenso calcolato al tasso di sconto del 5% annuo. Calcolare la somma ricevuta se si accetta di scontare la cambiale presso l'istituto di credito.

Risolvere i seguenti problemi legati ai versamenti di più somme di denaro e alle rendite:

19) Un'operazione finanziaria consiste nell'impiegare oggi la somma di 100 ∈ e tra 6 mesi la somma di 200 ∈. Calcolare la somma disponibile tra un anno applicando il regime della capitalizzazione composta con tasso mensile effettivo dell'1%.

20) Un'operazione finanziaria consiste nell'impiegare oggi la somma di 100 ∈ e tra 6 mesi la somma di 200 ∈. Calcolare la somma disponibile tra un anno applicando il regime della capitalizzazione composta con tasso semestrale effettivo del 5%.

21) Un'operazione finanziaria consiste nell'impiegare oggi la somma di 100 ∈ e tra 6 mesi la somma di 150 ∈. Calcolare la somma disponibile tra un anno applicando il regime della capitalizzazione composta con tasso trimestrale effettivo del 4%.

22) Si versano, a partire da oggi, 12 rate mensili di importo costante pari a 100 ∈. Determinare il montante in capitalizzazione composta disponibile tra un anno se il tasso di interesse mensile effettivo è pari all'1.5%.

23) Si versano, iniziando fra un mese, 12 rate mensili di importo costante pari a 100 ∈. Determinare il montante in capitalizzazione composta disponibile tra un anno se il tasso di interesse mensile effettivo è pari all'1.5%.

24) Si versano, a partire da oggi, 6 rate mensili di importo costante pari a 50 ∈. Determinare il montante in capitalizzazione composta disponibile tra 6 mesi se il tasso di interesse mensile effettivo è pari all'1%.

25) Un soggetto acquista a rate un macchinario con prezzo di listino pari a 10000 ∈. L'acquirente paga subito il 30% del prezzo e si impegna a saldare la rimanenza in 5 rate semestrali posticipate di ammontare R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso annuo nominale convertibile 2 volte l'anno del 20%. Determinare l'importo R delle rate.

26) Un soggetto acquista a rate un macchinario con prezzo di listino pari a 10000 ∈. L'acquirente paga subito il 20% del prezzo e si impegna a saldare la rimanenza in 5 rate semestrali posticipate di ammontare R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso annuo effettivo del 20%. Determinare l'importo R delle rate.

27) Per acquistare un impianto del valore di 5000 ∈ si versano subito 1000 ∈ e ci si impegna a saldare la rimanenza in 6 rate bimestrali posticipate di ammontare R,

calcolate al tasso annuo effettivo composto del 12%. Determinare l'importo R delle rate.

28) Un soggetto acquista un macchinario del valore di 15000 € pagando in contanti $\frac{1}{3}$ del prezzo e saldando la parte rimanente attraverso il versamento di 6 rate costanti, bimestrali, posticipate. Determinare l'ammontare R di ciascuna rata se il tasso di interesse composto applicato è del 12% annuo effettivo.

29) Un soggetto acquista a rate un macchinario con prezzo di listino pari a 10000 €. L'acquirente paga subito il 50% del prezzo e si impegna a saldare la rimanenza in 5 rate semestrali posticipate di ammontare R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso annuo nominale convertibile 2 volte l'anno del 20%. Determinare l'importo R delle rate.

30) L'acquisto di un macchinario del valore di 10000 € viene effettuato pagando in contanti, al momento della consegna, una somma corrispondente al 10% del prezzo e saldando la parte rimanente attraverso il versamento di 6 rate costanti, mensili, posticipate. Determinare l'ammontare R di ciascuna rata se il tasso di interesse composto applicato è del 12% annuo effettivo.

Capitolo 9

Scelte finanziarie

9.1. Criteri di scelta

Dopo avere introdotto, nel Capitolo precedente, i concetti di base del calcolo finanziario, è possibile considerare adesso l'argomento costituito dalle scelte finanziarie, che assumono particolare importanza in quanto molto spesso ci si trova ad affrontare, in pratica, problemi di scelta tra due o più operazioni finanziarie. Si tratta di solito di scegliere la più redditizia tra diverse operazioni di investimento, oppure la meno costosa tra diverse operazioni di finanziamento, o più in generale la migliore combinazione di investimenti e finanziamenti.

In questa Sezione vengono presentati due criteri di scelta, il criterio del VAN (Valore Attuale Netto) e quello del TIR (Tasso Interno di Rendimento), mentre nella Sezione successiva vengono presentati due indicatori legali di redditività e di onerosità delle operazioni di investimento e di finanziamento, il TAE (Tasso Annuo Effettivo) e il $TAEG$ (Tasso Annuo Effettivo Globale).

Il punto di partenza dell'analisi è costituito da un'operazione finanziaria, che può essere descritta da una successione di flussi di cassa:

$$f_1, f_2, ..., f_n$$

alle scadenze:

$$t_1, t_2, ..., t_n$$

dove i flussi positivi rappresentano delle entrate mentre quelli negativi rappresentano delle uscite. In particolare, se l'operazione è caratterizzata da un'uscita iniziale seguita da entrate (cioè $f_1 < 0$ e $f_2, f_3, ..., f_n > 0$) si ha un investimento in senso stretto, mentre se è caratterizzata da un'entrata iniziale seguita da uscite (cioè $f_1 > 0$ e $f_2, f_3, ..., f_n < 0$) si ha un finanziamento in senso stretto. Per questa operazione finanziaria si definisce Discounted Cash-Flow (DCF) la somma algebrica dei valori scontati dei suoi movimenti di cassa, calcolati al tempo $t_0 = 0$ con sconto composto. Tale somma algebrica è vista come funzione $G(x)$ del tasso di interesse x utilizzato per l'attualizzazione, per cui si ha:

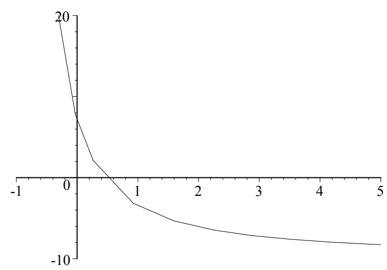
$$G(x) = \frac{f_1}{(1+x)^{t_1}} + \frac{f_2}{(1+x)^{t_2}} + ... + \frac{f_n}{(1+x)^{t_n}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{f_s}{(1+x)^{t_s}}$$

Il DCF può essere utilizzato in due modi, dando così origine a due diversi criteri impiegati per la scelta tra operazioni finanziarie.

Un primo impiego è quello che consiste nel calcolare il DCF di un'operazione finanziaria ad un certo tasso i, cioè $G(i)$. Si ottiene così un numero, che prende il nome di Valore Attuale Netto (VAN) dell'operazione, e può essere interpretato come il valore dell'operazione finanziaria per un soggetto che impiega il proprio denaro al tasso i (cioè l'importo che, pagato o riscosso in $t_0 = 0$, è equivalente per il soggetto all'intera operazione finanziaria).

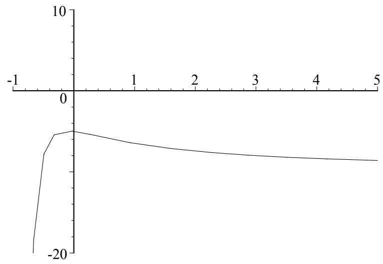
In base al criterio del VAN, per effettuare la scelta tra due o più operazioni finanziarie è sufficiente confrontare i loro VAN, e l'operazione migliore risulta in ogni caso (sia per gli investimenti sia per i finanziamenti) quella con il VAN più elevato.

Un secondo impiego è quello che consiste nell'utilizzare il DCF per determinare il tasso $x^* > -1$ che lo annulla, cioè tale che $G(x^*) = 0$. Un tasso x^* che annulla il DCF di un'operazione finanziaria prende il nome di Tasso Interno di Rendimento (TIR) dell'operazione stessa, e può essere interpretato come misura del rendimento di un investimento o del costo di un finanziamento. Graficamente, rappresentando in un diagramma cartesiano la funzione $G(x)$ relativa ad una certa operazione finanziaria, il TIR è individuato dall'intersezione del grafico della funzione con l'asse delle ascisse, cioè si ha:

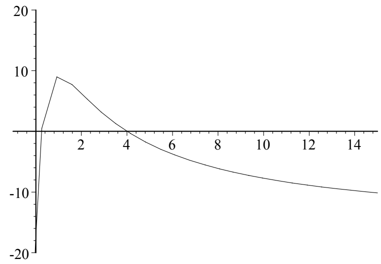


In base al criterio del TIR, per effettuare la scelta tra due o più operazioni finanziarie aventi la stessa natura (tutte di investimento oppure tutte di finanziamento) è sufficiente confrontare i loro TIR, dopodiché tra diverse operazioni di investimento si sceglie quella con TIR più elevato, mentre tra diverse operazioni di finanziamento si sceglie quella con TIR più basso.

In realtà, il criterio del TIR si fonda su di un'ipotesi estremente forte e irrealistica, quella che i reinvestimenti o finanziamenti parziali che una certa operazione comporta siano fatti proprio allo stesso tasso interno dell'operazione. In aggiunta, vi sono operazioni finanziarie per le quali il tasso interno non esiste ed operazioni finanziarie per le quali si ha una molteplicità di tassi interni, cioè:



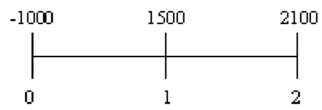
oppure:



(nel primo caso la curva che rappresenta $G(x)$ non interseca mai l'asse delle ascisse, nel secondo caso invece interseca l'asse in più di un punto), per cui in queste situazioni non è possibile l'applicazione del criterio del TIR.

In definitiva, il criterio basato sul VAN (eventualmente modificato e reso più realistico attraverso una sua generalizzazione, allo scopo di tenere conto della variabilità nel tempo dei tassi di interesse) risulta quello più adatto per effettuare scelte tra diverse operazioni finanziarie.

Esempio 9.1 *Data un'operazione finanziaria caratterizzata dai seguenti flussi di cassa alle scadenze (annue)* $0, 1, 2$*:*



calcolare il suo VAN *nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia pari al* 14% *annuo.*

In questo caso il DCF dell'operazione è dato da:

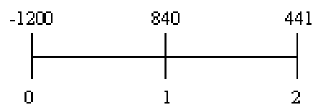
$$G(x) = -1000 + \frac{1500}{1+x} + \frac{2100}{(1+x)^2}$$

e il VAN al tasso del 14% è pari a:

$$G(0.14) = -1000 + \frac{1500}{1.14} + \frac{2100}{1.14^2} = 1931.67$$

che è il valore attuale netto cercato.

Esempio 9.2 *Data un'operazione finanziaria caratterizzata dai seguenti flussi di cassa alle scadenze (annue)* $0, 1, 2$*:*



calcolare il suo TIR*.*

In questo caso il DCF dell'operazione è dato da:

$$G(x) = -1200 + \frac{840}{1+x} + \frac{441}{(1+x)^2}$$

e il TIR è quel tasso x^* tale che $G(x^*) = 0$, per cui si ha:

$$\begin{aligned}
-1200 + \frac{840}{1+x} + \frac{441}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{-1200(1+x)^2 + 840(1+x) + 441}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
-1200(1+x)^2 + 840(1+x) + 441 &= 0 \Rightarrow \\
400x^2 + 520x - 27 &= 0 \Rightarrow \\
x_{1,2} &= \frac{-520 \mp \sqrt{270400 + 43200}}{800} = \\
&= \frac{-520 \mp 560}{800} = \begin{cases} (-1.35) \\ 0.05 \end{cases}
\end{aligned}$$

dove -1.35 non è accettabile perché deve essere $x^* > -1$. In conclusione, il TIR dell'operazione è pari al 5%.

Esempio 9.3 *Date le seguenti operazioni finanziarie di investimento (nelle quali i flussi di cassa si riferiscono a scadenze annue):*

confrontarle utilizzando sia il criterio del TIR sia il criterio del VAN (nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato per il calcolo sia pari all'11% annuo).

In questo caso i DCF delle due operazioni sono dati da:

$$G_A(x) = -1000 + \frac{1130}{1+x}$$

$$G_B(x) = -1000 + \frac{620}{1+x} + \frac{560}{(1+x)^2}$$

Il TIR della prima operazione è quel tasso x^* per il quale si ha $G_A(x^*) = 0$, si ha allora:

$$\begin{aligned}
-1000 + \frac{1130}{1+x} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{-1000(1+x) + 1130}{1+x} &= 0 \Rightarrow \\
-1000(1+x) + 1130 &= 0 \Rightarrow \\
1000x - 130 &= 0 \Rightarrow x = \frac{130}{1000} = 0.13
\end{aligned}$$

Il TIR della seconda operazione è quel tasso x^* per il quale si ha $G_B(x^*) = 0$, si ha allora:

$$\begin{aligned}
-1000 + \frac{620}{1+x} + \frac{560}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{-1000(1+x)^2 + 620(1+x) + 560}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
-1000(1+x)^2 + 620(1+x) + 560 &= 0 \Rightarrow \\
50x^2 + 69x - 9 &= 0 \Rightarrow \\
x_{1,2} &= \frac{-69 \mp \sqrt{4761 + 1800}}{100} = \\
&= \frac{-69 \mp 81}{100} = \begin{cases} (-1.5) \\ 0.12 \end{cases}
\end{aligned}$$

dove -1.5 non è accettabile perché deve essere $x^* > -1$.

In conclusione risulta:

$$TIR_A = 13\% \qquad\qquad TIR_B = 12\%$$

e poiché $TIR_A > TIR_B$ l'operazione A è preferibile.

Considerando invece il VAN, calcolato al tasso $i = 11\%$, per le due operazioni si ha:

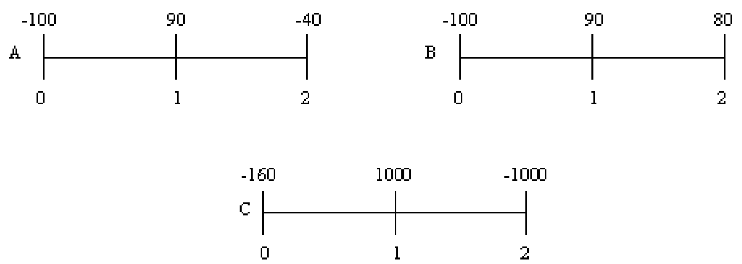
$$G_A(0.11) = -1000 + \frac{1130}{1.11} = 18.02$$

$$G_B(0.11) = -1000 + \frac{620}{1.11} + \frac{560}{1.11^2} = 13.07$$

e poiché $G_A(0.11) > G_B(0.11)$ l'operazione A è preferibile.

In questo caso, quindi, il criterio del TIR e quello del VAN portano alla stessa conclusione, e l'operazione finanziaria A è preferibile.

Esempio 9.4 *Date le seguenti operazioni finanziarie (nelle quali i flussi di cassa si riferiscono a scadenze annue):*



confrontarle utilizzando sia il criterio del TIR sia il criterio del VAN (nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato per il calcolo sia pari al 4% annuo).

In questo caso i DCF delle tre operazioni sono dati da:

$$G_A(x) = -100 + \frac{90}{1+x} - \frac{40}{(1+x)^2}$$

$$G_B(x) = -100 + \frac{90}{1+x} + \frac{80}{(1+x)^2}$$

$$G_C(x) = -160 + \frac{1000}{1+x} - \frac{1000}{(1+x)^2}$$

Il TIR della prima operazione è quel tasso x^* per il quale si ha $G_A(x^*) = 0$, si ha allora:

$$\begin{aligned} -100 + \frac{90}{1+x} - \frac{40}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{-100(1+x)^2 + 90(1+x) - 40}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\ -100(1+x)^2 + 90(1+x) - 40 &= 0 \Rightarrow \\ 10x^2 + 11x + 5 &= 0 \Rightarrow \\ x_{1,2} = \frac{-11 \mp \sqrt{121 - 200}}{20} & \quad \text{non vi sono soluzioni} \end{aligned}$$

Il TIR della seconda operazione è quel tasso x^* per il quale si ha $G_B(x^*) = 0$, si ha allora:

$$
\begin{aligned}
-100 + \frac{90}{1+x} + \frac{80}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{-100(1+x)^2 + 90(1+x) + 80}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
-100(1+x)^2 + 90(1+x) + 80 = 0 &\Rightarrow \\
10x^2 + 11x - 7 = 0 &\Rightarrow \\
x_{1,2} &= \frac{-11 \mp \sqrt{121 + 280}}{20} = \\
&= \frac{-11 \mp 20.02}{20} = \begin{cases} (-1.55) \\ 0.45 \end{cases}
\end{aligned}
$$

dove -1.55 non è accettabile perché deve essere $x^* > -1$.

Il TIR della terza operazione, infine, è quel tasso x^* per il quale si ha $G_C(x^*) = 0$, si ha allora:

$$
\begin{aligned}
-160 + \frac{1000}{1+x} - \frac{1000}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{-160(1+x)^2 + 1000(1+x) - 1000}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
-160(1+x)^2 + 1000(1+x) - 1000 = 0 &\Rightarrow \\
4x^2 - 17x + 4 = 0 &\Rightarrow \\
x_{1,2} &= \frac{17 \mp \sqrt{289 - 64}}{8} = \\
&= \frac{17 \mp 15}{8} = \begin{cases} 0.25 \\ 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

In conclusione, in questo caso la prima operazione non ha alcun TIR, mentre la seconda ne ha 1 (pari al 45%) e la terza ne ha 2 (pari al 25% e al 400%), per cui non è possibile utilizzare questo criterio per effettuare una scelta tra le tre operazioni finanziarie.

Considerando invece il VAN, calcolato al tasso $i = 4\%$, per le tre operazioni si ha:

$$G_A(0.04) = -100 + \frac{90}{1.04} - \frac{40}{1.04^2} = -50.44$$

$$G_B(0.04) = -100 + \frac{90}{1.04} + \frac{80}{1.04^2} = 60.50$$

$$G_C(0.04) = -160 + \frac{1000}{1.04} - \frac{1000}{1.04^2} = -123.02$$

e poiché $G_B(0.04) > G_A(0.04) > G_C(0.04)$ l'operazione B è preferibile.

In questo caso, quindi, il criterio del TIR non è applicabile, mentre il criterio del VAN può essere utilizzato, e l'operazione finanziaria B è quella preferibile.

9.2. Indicatori legali di redditività e onerosità

Con riferimento alle operazioni finanziarie è possibile anche introdurre due indicatori, utilizzati per misurare la redditività o l'onerosità di queste operazioni, il TAE (Tasso Annuo Effettivo) e il $TAEG$ (Tasso Annuo Effettivo Globale). Alcuni altri indicatori possono poi essere introdotti con riferimento ai titoli, e verranno considerati nel prossimo Capitolo.

In particolare, dato un finanziamento di ammontare F concesso all'epoca $t_0 = 0$, a fronte del quale il soggetto finanziato si impegna a pagare rate di importo $R_1, R_2, ..., R_n$ alle scadenze $t_1, t_2, ..., t_n$, si definisce TAE (Tasso Annuo Effettivo) dell'operazione il tasso annuo equivalente al tasso x tale che:

$$F - \frac{R_1}{(1+x)^{t_1}} - \frac{R_2}{(1+x)^{t_2}} - ... - \frac{R_n}{(1+x)^{t_n}} = 0$$

Il TAE rappresenta quindi il tasso interno (su base annua) dell'operazione, senza tenere conto di eventuali oneri accessori. Si possono poi introdurre tipi diversi di spese accessorie nel contratto di finanziamento, le quali a seconda dei casi possono essere portate in riduzione della somma erogata inizialmente oppure in aumento delle singole rate. Di conseguenza, il finanziamento concesso inizialmente è:

$$F' = F - \text{spese portate in riduzione del finanziamento iniziale}$$

mentre la somma versata alla generica scadenza t_s è:

$$R'_s = R_s + \text{spese portate in aumento della generica rata}$$

e si ha $F' \leq F$ e $R'_s \geq R_s$ con almeno una delle due disuguaglianze verificata in senso stretto. A questo punto si definisce $TAEG$ (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione il tasso annuo equivalente al tasso x tale che:

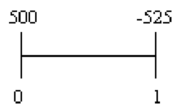
$$F' - \frac{R'_1}{(1+x)^{t_1}} - \frac{R'_2}{(1+x)^{t_2}} - ... - \frac{R'_n}{(1+x)^{t_n}} = 0$$

Il $TAEG$ rappresenta quindi il tasso interno (su base annua) dell'operazione, tenendo conto degli oneri accessori ad essa collegati. Per una stessa operazione (che comporta il sostenimento di spese accessorie) risulta sempre $TAEG > TAE$.

Va peraltro osservato che, essendo di fatto dei tassi interni, il TAE e il $TAEG$ sono soggetti ai limiti e alle critiche che sono stati brevemente illustrati nella Sezione precedente con riferimento a tale tipo di parametro.

Esempio 9.5 *Un finanziamento di* 500 $\in$ *viene rimborsato dopo* 1 *anno versando la somma di* 525 $\in$. *Determinare* TAE *e* $TAEG$ *dell'operazione nell'ipotesi che la somma prestata venga ridotta delle spese di istruzione della pratica, pari a* 10 $\in$.

I flussi generati dall'operazione, senza tenere conto delle spese accessorie, sono:



e il TAE dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$500 - \frac{525}{1+x} = 0$$

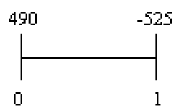
da cui si ha:

$$x = \frac{525}{500} - 1 = 0.05$$

cioè:

$$TAE = 5\%$$

I flussi generati dall'operazione tenendo conto delle spese accessorie sono invece:



e il $TAEG$ dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$490 - \frac{525}{1+x} = 0$$

da cui si ha:

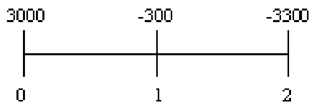
$$x = \frac{525}{490} - 1 = 0.0714$$

cioè:

$$TAEG = 7.14\%$$

Esempio 9.6 *Un finanziamento di* $3000 \in$ *viene rimborsato in* 2 *rate annue versando rispettivamente le somme di* $300 \in$ *e* $3300 \in$*. Determinare* TAE *e* $TAEG$ *dell'operazione nell'ipotesi che il finanziatore richieda anche* $100 \in$ *a titolo di rimborso spese per l'istruzione della pratica di finanziamento (da portare in riduzione dell'ammontare finanziato) e una somma a titolo di rimborso spese di incasso pari all'*1% *delle rate (da versare insieme alle stesse).*

I flussi generati dall'operazione, senza tenere conto delle spese accessorie, sono:



e il TAE dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$3000 - \frac{300}{1+x} - \frac{3300}{(1+x)^2} = 0$$

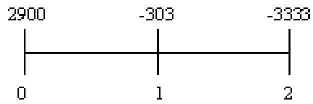
da cui si ha:

$$\begin{aligned}\frac{3000(1+x)^2 - 300(1+x) - 3300}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\ 3000(1+x)^2 - 300(1+x) - 3300 &= 0 \Rightarrow \\ 10x^2 + 19x - 2 &= 0 \Rightarrow \\ x_{1,2} &= \frac{-19 \mp \sqrt{361+80}}{20} = \\ &= \frac{-19 \mp 21}{20} = \begin{cases} (-2) \\ 0.1 \end{cases}\end{aligned}$$

dove -2 non è accettabile perché deve essere $x > -1$, si ha allora:

$$TAE = 10\%$$

I flussi generati dall'operazione tenendo conto delle spese accessorie sono invece:



e il $TAEG$ dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$2900 - \frac{303}{1+x} - \frac{3333}{(1+x)^2} = 0$$

da cui si ha:

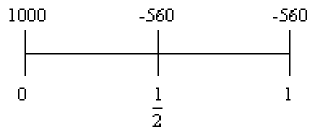
$$\begin{aligned}
\frac{2900(1+x)^2 - 303(1+x) - 3333}{(1+x)^2} &= 0 \Rightarrow \\
2900(1+x)^2 - 303(1+x) - 3333 &= 0 \Rightarrow \\
2900x^2 + 5497x - 736 &= 0 \Rightarrow \\
x_{1,2} &= \frac{-5497 \mp \sqrt{30217009 + 8537600}}{5800} = \\
&= \frac{-5497 \mp 6225.32}{5800} = \begin{cases} (-2.02) \\ 0.1256 \end{cases}
\end{aligned}$$

dove -2.02 non è accettabile perché deve essere $x > -1$, si ha allora:

$$TAEG = 12.56\%$$

Esempio 9.7 *Una finanziaria concede un prestito di* 1000 € *contro l'impegno del debitore a versare* 2 *rate semestrali costanti di* 560 €. *Determinare* TAE *e* $TAEG$ *dell'operazione nell'ipotesi che l'ammontare prestato venga ridotto delle spese di istruzione della pratica, pari a* 50 €, *e nell'ipotesi alternativa in cui, anziché essere sottratte dalla somma data in prestito, queste spese vengano suddivise in parti uguali e portate in aumento delle due rate semestrali.*

I flussi generati dall'operazione, senza tenere conto delle spese accessorie, sono:



e il TAE dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$1000 - \frac{560}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{560}{1+x} = 0$$

A questo punto, ponendo $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = y$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
1000 - \frac{560}{y} - \frac{560}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1000y^2 - 560y - 560}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\
1000y^2 - 560y - 560 &= 0 \Rightarrow \\
25y^2 - 14y - 14 &= 0 \Rightarrow \\
y_{1,2} &= \frac{14 \mp \sqrt{196 + 1400}}{50} = \\
&= \frac{14 \mp 39.95}{50} = \begin{cases} (-0.519) \\ 1.079 \end{cases}
\end{aligned}$$

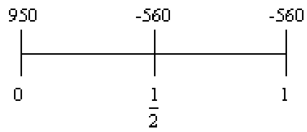
dove -0.519 non è accettabile perché $\sqrt{1+x}$ deve essere ≥ 0, si ha infine:

$$\sqrt{1+x} = 1.079 \Rightarrow x = 0.1642$$

e quindi:

$$TAE = 16.42\%$$

I flussi generati dall'operazione tenendo conto delle spese accessorie, nel caso in cui queste vengano portate in riduzione dell'ammontare prestato, sono invece:



e il $TAEG$ dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$950 - \frac{560}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{560}{1+x} = 0$$

e ponendo $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = y$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 950 - \frac{560}{y} - \frac{560}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{950y^2 - 560y - 560}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\ 950y^2 - 560y - 560 &= 0 \Rightarrow \\ 95y^2 - 56y - 56 &= 0 \Rightarrow \\ y_{1,2} &= \frac{56 \mp \sqrt{3136 + 21280}}{190} = \\ &= \frac{56 \mp 156.26}{190} = \begin{cases} (-0.5277) \\ 1.1171 \end{cases} \end{aligned}$$

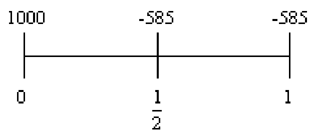
dove -0.5277 non è accettabile perché $\sqrt{1+x}$ deve essere ≥ 0, si ha infine:

$$\sqrt{1+x} = 1.1171 \Rightarrow x = 0.2479$$

e quindi:

$$TAEG = 24.79\%$$

I flussi generati dall'operazione tenendo conto delle spese accessorie, nel caso in cui queste vengano portate in aumento delle due rate, infine, sono:



e il $TAEG$ dell'operazione è il tasso x che risolve l'equazione:

$$1000 - \frac{585}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{585}{1+x} = 0$$

e ponendo $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = y$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
1000 - \frac{585}{y} - \frac{585}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1000y^2 - 585y - 585}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\
1000y^2 - 585y - 585 &= 0 \Rightarrow \\
200y^2 - 117y - 117 &= 0 \Rightarrow \\
y_{1,2} &= \frac{117 \mp \sqrt{13689 + 93600}}{400} = \\
&= \frac{117 \mp 327.55}{400} = \begin{cases} (-0.5264) \\ 1.1114 \end{cases}
\end{aligned}$$

dove -0.5264 non è accettabile perché $\sqrt{1+x}$ deve essere ≥ 0, si ha infine:

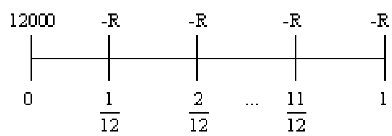
$$\sqrt{1+x} = 1.1114 \Rightarrow x = 0.2352$$

e quindi:

$$TAEG = 23.52\%$$

Esempio 9.8 *L'acquisto di un'automobile, del valore di* 12000 €*, viene finanziato consentendo il pagamento di* 12 *rate mensili, posticipate, senza interessi, di* 1000 € *ciascuna. Determinare* TAE *e* $TAEG$ *dell'operazione nell'ipotesi in cui le spese di istruzione della pratica di finanziamento, pari a* 300 €*, vengano pagate al momento della concessione del finanziamento stesso.*

I flussi generati dall'operazione, senza tenere conto delle spese accessorie, sono:



con $R = 1000$, e il TAE dell'operazione è il tasso annuo x equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione:

$$12000 - \frac{1000}{1 + x_{12}} - \frac{1000}{(1 + x_{12})^2} - ... - \frac{1000}{(1 + x_{12})^{12}} = 0$$

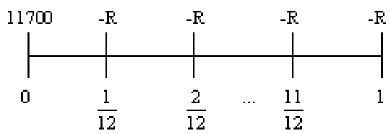
Si vede facilmente che tale equazione è soddisfatta quando $x_{12} = 0$, dopodiché si ha:

$$x = (1 + x_{12})^{12} - 1 = 0$$

cioè:

$$TAE = 0\%$$

I flussi generati dall'operazione tenendo conto delle spese accessorie sono invece:



con $R = 1000$, e il $TAEG$ dell'operazione è il tasso annuo x equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione:

$$11700 - 1000 \cdot a_{12\rceil x_{12}} = 0$$

cioè:

$$11700 - 1000 \cdot \frac{1 - (1 + x_{12})^{-12}}{x_{12}} = 0$$

Per tentativi si trova $x_{12} = 0.0039$ e poi si ha:

$$x = (1 + x_{12})^{12} - 1 = (1 + 0.0039)^{12} - 1 = 0.0478$$

cioè:

$$TAEG = 4.78\%$$

9.3. Esercizi da svolgere

Risolvere i seguenti problemi relativi ai criteri di scelta tra operazioni finanziarie:

1) Un'operazione finanziaria comporta un'entrata di cassa immediata di 100 €, un'uscita di 200 € tra 1 anno e una nuova entrata di 100 € tra 2 anni. Calcolare il VAN dell'operazione nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia del 10% annuo.

2) Un'operazione finanziaria comporta un'uscita di cassa immediata di 100 € e due entrate, entrambe di 100 €, rispettivamente tra 6 mesi e tra 1 anno. Calcolare il VAN dell'operazione nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia del 5% annuo.

3) Un'operazione finanziaria comporta un'entrata di cassa immediata di 50 €, un'uscita di 100 € tra 3 mesi e una nuova entrata di 150 € tra 6 mesi. Calcolare il VAN dell'operazione nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia del 3% annuo.

4) Un'operazione finanziaria è caratterizzata da un'uscita di cassa immediata di 500 € e da un'entrata di 600 € tra 1 anno. Determinare il suo TIR.

5) Un'operazione finanziaria è caratterizzata da un'uscita di cassa immediata di 1000 € e da due entrate, la prima di 660 € tra 1 anno e la seconda di 484 € tra 2 anni. Determinare il suo TIR.

6) Un'operazione finanziaria è caratterizzata da un'uscita di cassa immediata di 500 € e da due entrate, la prima di 220 € tra 6 mesi e la seconda di 363 € tra 1 anno. Determinare il suo TIR.

7) Due operazioni finanziarie della stessa natura sono caratterizzate da valore attuale netto pari, rispettivamente, a +1000 € per l'operazione A e a +1500 € per l'operazione B. Quale delle due operazioni risulta preferibile?

8) Due operazioni finanziarie della stessa natura sono caratterizzate da tasso interno pari, rispettivamente, al 10% per l'operazione A e al 12% per l'operazione B. Quale delle due operazioni risulta preferibile?

9) Date due operazioni finanziarie della stessa natura (entrambe di investimento oppure entrambe di finanziamento), quale operazione sceglie un soggetto che valuta in base al criterio del tasso interno?

10) Date due operazioni finanziarie della stessa natura (entrambe di investimento oppure entrambe di finanziamento), quale operazione sceglie un soggetto che valuta in base al criterio del valore attuale netto?

11) Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di investimento. L'operazione A origina un'uscita di cassa immediata di 1500 $\in$ e un'entrata di 1605 $\in$ tra 1 anno, mentre l'operazione B origina un'uscita di cassa immediata di 300 $\in$ e un'entrata di 324 $\in$ tra 1 anno. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del VAN al tasso annuo composto del 6%.

12) Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di investimento. L'operazione A origina un'uscita di cassa immediata di 1500 $\in$ e un'entrata di 1605 $\in$ tra 1 anno, mentre l'operazione B origina un'uscita di cassa immediata di 300 $\in$ e un'entrata di 324 $\in$ tra 1 anno. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del TIR.

13) Un soggetto deve scegliere tra due operazioni finanziarie. L'operazione A origina un'uscita di cassa immediata di 1000 $\in$ e due entrate, rispettivamente di 500 $\in$ dopo 1 anno e di 1500 $\in$ dopo 3 anni, mentre l'operazione B origina un'uscita di cassa immediata di 500 $\in$, un'ulteriore uscita di 1000 $\in$ dopo 2 anni e due entrate, rispettivamente di 1000 $\in$ dopo 1 anno e di 1500 $\in$ dopo 3 anni. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del VAN al tasso annuo composto del 5%.

14) Un soggetto deve scegliere tra due operazioni finanziarie. L'operazione A origina un'entrata di cassa immediata di 100 $\in$ e un'ulteriore entrata di 110 $\in$ dopo 1 anno, mentre l'operazione B origina un'entrata di cassa di 110 $\in$ dopo 1 anno e un'ulteriore entrata di 121 $\in$ dopo 2 anni. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del VAN al tasso annuo composto del 10%.

15) Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di finanziamento. L'operazione A origina un'entrata di cassa immediata di 100 $\in$ e due uscite, rispettivamente di 60 $\in$ dopo 1 anno e di 72 $\in$ dopo 2 anni, mentre l'operazione B origina un'entrata di cassa immediata di 200 $\in$ e due uscite, rispettivamente di 130 $\in$ dopo 1 anno e di 169 $\in$ dopo 2 anni. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del TIR.

Risolvere i seguenti problemi relativi agli indicatori legali di redditività e onerosità degli investimenti e dei finanziamenti:

16) Un finanziamento di 1000 € viene rimborsato dopo 1 anno pagando la somma di 1100 €. Determinare il TAE dell'operazione.

17) Un finanziamento di 300 € viene rimborsato dopo 6 mesi pagando la somma di 360 €. Determinare il TAE dell'operazione.

18) Un finanziamento di 500 € viene rimborsato dopo 1 anno e 4 mesi pagando la somma di 550 €. Determinare il TAE dell'operazione.

19) Si investe la somma di 200 € e dopo 1 anno si incassano 210 €. Determinare il TAE dell'operazione.

20) Si investe la somma di 400 € e dopo 6 mesi si incassano 440 €. Determinare il TAE dell'operazione.

21) Si investe la somma di 1500 € e dopo 1 anno e mezzo si incassano 1600 €. Determinare il TAE dell'operazione.

22) Un finanziamento di 1000 € viene rimborsato dopo 1 anno pagando la somma di 1150 €. Determinare il $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che vi siano spese accessorie pari a 50 €, pagate al momento del rimborso.

23) Un finanziamento di 5100 € viene rimborsato dopo 4 mesi pagando la somma di 5500 €. Determinare il $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che vi siano spese accessorie pari a 100 €, sostenute immediatamente.

24) Un finanziamento di 420 € viene rimborsato dopo 2 anni pagando la somma di 529 €. Determinare il $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che vi siano spese di istruzione della pratica pari a 20 €, portate in riduzione dell'ammontare finanziato.

25) Un soggetto ottiene da una società finanziaria la somma di 1000 € che si impegna a rimborsare pagando 2 rate semestrali posticipate di 600 € ciascuna. Determinare TAE e $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che vi siano spese accessorie pari a 100 €, sostenute immediatamente.

26) Una finanziaria concede un prestito di 600 € contro l'impegno del debitore a versare 2 rate trimestrali costanti di 350 €. Determinare TAE e $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che vi siano spese accessorie pari a 40 €, ripartite in parti uguali tra le 2 rate.

27) L'acquisto di un macchinario, del valore di 18000 €, viene finanziato consentendo il pagamento di 12 rate mensili posticipate, senza interessi, di 1500 € ciascuna. Determinare TAE e $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che le spese di istruzione della pratica, pari a 100 €, siano portate in riduzione dell'ammontare finanziato.

28) Una finanziaria concede un prestito di 1000 € contro l'impegno del debitore a versare 12 rate mensili posticipate di 100 € ciascuna. Determinare TAE e $TAEG$ dell'operazione nell'ipotesi che le spese di istruzione della pratica, pari a 80 €, siano pagate in contanti al momento della stipula del contratto.

29) Data un'operazione finanziaria che comporta il sostenimento di oneri accessori, quale è la relazione tra TAE e $TAEG$ dell'operazione?

30) Data un'operazione finanziaria che non comporta il sostenimento di oneri accessori, quale è la relazione tra TAE e $TAEG$ dell'operazione?

Capitolo 10

Applicazioni finanziarie

10.1. Ammortamento di un prestito

In questo Capitolo vengono esaminate alcune applicazioni dei concetti introdotti in precedenza. Un primo argomento di interesse, a questo proposito, è costituito dall'ammortamento di un prestito.

Il problema dell'ammortamento sorge quando un soggetto riceve al tempo 0 una determinata somma S e si impegna a pagare in futuro, alle scadenze $1, 2, ..., n$, le somme $R_1, R_2, ..., R_n$, dette rate di ammortamento, le quali sono comprensive di una quota di capitale (che riduce il debito) e di una quota di interessi (che costituisce appunto il pagamento degli interessi del periodo relativo). Costruire il piano di ammortamento per un'operazione di questo tipo significa scomporre le rate in quote di capitale e quote di interessi e descrivere l'andamento temporale dell'operazione finanziaria in esame. In particolare, si ipotizza nell'analisi condotta nel seguito che gli interessi vengano calcolati in base ad una legge esponenziale con tasso annuo di interesse i.

Il piano di ammortamento può essere costruito secondo due diverse impostazioni:

- impostazione elementare: in questo caso si specificano inizialmente i versamenti a titolo di capitale, cioè il profilo delle quote di capitale è dato (un caso particolare è quello di ammortamento con quote di capitale costanti, detto anche ammortamento all'italiana);

- impostazione finanziaria: in questo caso si specificano inizialmente i versamenti complessivi (le rate di ammortamento), cioè il profilo delle rate è dato (un caso particolare è quello di ammortamento con rate costanti, detto anche ammortamento alla francese).

Nella costruzione del piano di ammortamento, inoltre, intervengono le seguenti grandezze (con $t = 1, 2, ..., n$, dove per semplicità si ipotizza che questi intervalli di tempo rappresentino anni – ma il ragionamento è identico nel caso di periodi diversi dall'anno –):

$$
\begin{aligned}
S = D_0 &= \text{debito iniziale} \\
C_t &= \text{quota di capitale al tempo } t \\
I_t &= \text{quota di interessi al tempo } t \\
R_t &= \text{rata al tempo } t \\
E_t &= \text{debito estinto al tempo } t \\
D_t &= \text{debito residuo al tempo } t
\end{aligned}
$$

Queste grandezze sono legate tra di loro dalle seguenti relazioni:

$$I_t = i \cdot D_{t-1}$$

(cioè la quota di interessi di un certo periodo si ottiene applicando il tasso di interesse i al debito residuo esistente alla fine del periodo precedente);

$$R_t = C_t + I_t$$

(cioè la rata di ammortamento di un certo periodo si ottiene sommando la quota di capitale e la quota di interessi di quel periodo);

$$E_t = C_1 + C_2 + ... + C_t = \sum_{s=1}^{t} C_s$$

(cioè il debito estinto ad un certo periodo è uguale alla somma delle quote di capitale pagate fino a quel periodo);

$$D_t = S - E_t = C_{t+1} + C_{t+2} + ... + C_n = \sum_{s=t+1}^{n} C_s$$

(cioè il debito residuo ad un certo periodo è uguale alla differenza tra il debito complessivo e il debito estinto a quel periodo, ed anche alla somma delle quote di capitale ancora da pagare).

Accanto a queste relazioni valgono poi le cosiddette "condizioni di chiusura" dell'ammortamento, in particolare:

(i) Condizione di chiusura elementare:

$$S = \sum_{t=1}^{n} C_t$$

in base alla quale il valore del debito iniziale deve essere uguale alla somma delle quote di capitale.

(ii) Condizione di chiusura finanziaria iniziale:

$$S = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t}$$

in base alla quale il valore del debito iniziale deve essere uguale alla somma delle rate di ammortamento, opportunamente scontate (cioè al loro valore attuale complessivo).

(iii) Condizione di chiusura finanziaria finale:

$$S(1+i)^n = \sum_{t=1}^{n} R_t \cdot (1+i)^{n-t}$$

in base alla quale il valore del debito iniziale, calcolato alla scadenza dell'ammortamento (cioè il suo montante), deve essere uguale alla somma delle rate di ammortamento, opportunamente capitalizzate (cioè al loro montante complessivo, sempre calcolato alla scadenza dell'ammortamento).

Queste tre condizioni di chiusura risultano equivalenti solo utilizzando una legge finanziaria di tipo esponenziale (cioè una legge di capitalizzazione composta), che è il caso preso in esame, mentre nel caso di una legge non esponenziale viene meno l'equivalenza tra di esse.

In particolare, poi, la condizione (i) rappresenta il punto di partenza per la costruzione del piano di ammortamento nel caso di ammortamento con quote di capitale costanti (perché viene utilizzata per determinare l'ammontare della singola quota di capitale), mentre la condizione (ii) rappresenta il punto di partenza per la costruzione del piano di ammortamento nel caso di ammortamento con rate costanti (perché viene utilizzata per determinare l'ammontare della singola rata).

Nella costruzione di un piano di ammortamento, infine, le grandezze prima elencate vengono disposte in un prospetto costruito nel modo seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	S
1	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
n	...	...	...	S	–

Si deve inoltre tenere presente che nella costruzione di un piano di ammortamento secondo l'impostazione elementare (in cui cioè si parte dalle quote di capitale) le diverse grandezze vengono inserite nel prospetto secondo il seguente ordine:

1. Si determina la quota di capitale C_1.
2. Si determina la quota di interessi I_1.
3. Si determina la rata R_1.
4. Si determinano il debito estinto E_1 e il debito residuo D_1.
5. Si segue lo stesso ordine per i periodi successivi al primo.

Nella costruzione di un piano di ammortamento secondo l'impostazione finanziaria (in cui cioè si parte dalle rate), invece, le diverse grandezze vengono inserite nel prospetto secondo il seguente ordine:

1. Si determina la rata R_1.
2. Si determina la quota di interessi I_1.
3. Si determina la quota di capitale C_1.
4. Si determinano il debito estinto E_1 e il debito residuo D_1.
5. Si segue lo stesso ordine per i periodi successivi al primo.

In ogni caso, in corrispondenza dell'ultimo periodo di ammortamento il debito estinto deve essere uguale all'ammontare del debito iniziale S e il debito residuo deve essere uguale a 0, per cui l'ammortamento risulta chiuso.

Esempio 10.1 *Un finanziamento di* 1000 € *viene rimborsato in* 3 *anni pagando, a titolo di quote di capitale, rispettivamente* 200 €*,* 300 € *e* 500 €*. Costruire il piano di ammortamento dato il tasso di interesse del* 15% *annuo composto.*

In questo caso è dato il profilo delle quote di capitale, per cui il piano di ammortamento può essere costruito secondo l'impostazione elementare. Seguendo l'ordine prima indicato per il calcolo delle diverse grandezze si ha allora che la prima quota di capitale è:

$$C_1 = 200$$

mentre la prima quota di interessi può essere calcolata applicando il tasso di interesse $i = 15\%$ al debito iniziale:

$$I_1 = i \cdot D_0 = 0.15 \cdot 1000 = 150$$

per cui la prima rata è data da:

$$R_1 = C_1 + I_1 = 200 + 150 = 350$$

e il debito estinto e il debito residuo relativi al primo anno risultano:

$$E_1 = C_1 = 200 \qquad D_1 = S - E_1 = 1000 - 200 = 800$$

A questo punto si procede seguendo lo stesso ordine per determinare le grandezze relative al secondo anno; la seconda quota di capitale è:

$$C_2 = 300$$

mentre la seconda quota di interessi può essere calcolata applicando il tasso di interesse $i = 15\%$ al debito residuo del periodo precedente:

$$I_2 = i \cdot D_1 = 0.15 \cdot 800 = 120$$

per cui la seconda rata è data da:

$$R_2 = C_2 + I_2 = 300 + 120 = 420$$

e il debito estinto e il debito residuo relativi al secondo anno risultano:

$$E_2 = C_1 + C_2 = 200 + 300 = 500 \qquad D_2 = S - E_2 = 1000 - 500 = 500$$

Per il terzo anno, infine, la quota di capitale è:

$$C_3 = 500$$

mentre la quota di interessi è:

$$I_3 = i \cdot D_2 = 0.15 \cdot 500 = 75$$

per cui la rata è:

$$R_3 = C_3 + I_3 = 500 + 75 = 575$$

e il debito estinto e il debito residuo risultano:

$$E_3 = C_1 + C_2 + C_3 = 200 + 300 + 500 = 1000 \qquad D_3 = S - E_3 = 1000 - 1000 = 0$$

A questo punto diventa possibile compilare il piano di ammortamento, che è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	1000
1	200	150	350	200	800
2	300	120	420	500	500
3	500	75	575	1000	–

Si può infine verificare che sono soddisfatte le condizioni di chiusura, in particolare la condizione di chiusura elementare è:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1000$$

mentre la condizione di chiusura finanziaria iniziale è data da:

$$\frac{R_1}{1.15} + \frac{R_2}{1.15^2} + \frac{R_3}{1.15^3} = 1000$$

e la condizione di chiusura finanziaria finale risulta:

$$R_1 \cdot 1.15^2 + R_2 \cdot 1.15 + R_3 = 1000 \cdot 1.15^3$$

Esempio 10.2 *Un finanziamento di* 1000 € *viene rimborsato in* 3 *anni pagando, a titolo di rate, rispettivamente* 400 €, 470 € *e* 330 €. *Costruire il piano di ammortamento dato il tasso di interesse del* 10% *annuo composto (che è il tasso interno dell'operazione e garantisce il rispetto delle condizioni di chiusura finanziarie).*

In questo caso è dato il profilo delle rate, per cui il piano di ammortamento può essere costruito secondo l'impostazione finanziaria. Seguendo l'ordine prima indicato per il calcolo delle diverse grandezze si ha allora che la prima rata è:

$$R_1 = 400$$

mentre la prima quota di interessi può essere calcolata applicando il tasso di interesse $i = 10\%$ al debito iniziale:

$$I_1 = i \cdot D_0 = 0.10 \cdot 1000 = 100$$

per cui la prima quota di capitale è data da:

$$C_1 = R_1 - I_1 = 400 - 100 = 300$$

e il debito estinto e il debito residuo relativi al primo anno risultano:

$$E_1 = C_1 = 300 \qquad D_1 = S - E_1 = 1000 - 300 = 700$$

A questo punto si procede seguendo lo stesso ordine per determinare le grandezze relative al secondo anno; la seconda rata è:

$$R_2 = 470$$

mentre la seconda quota di interessi può essere calcolata applicando il tasso di interesse $i = 10\%$ al debito residuo del periodo precedente:

$$I_2 = i \cdot D_1 = 0.10 \cdot 700 = 70$$

per cui la seconda quota di capitale è data da:

$$C_2 = R_2 - I_2 = 470 - 70 = 400$$

e il debito estinto e il debito residuo relativi al secondo anno risultano:

$$E_2 = C_1 + C_2 = 300 + 400 = 700 \qquad D_2 = S - E_2 = 1000 - 700 = 300$$

Per il terzo anno, infine, la rata è:

$$R_3 = 330$$

mentre la quota di interessi è:

$$I_3 = i \cdot D_2 = 0.10 \cdot 300 = 30$$

per cui la quota di capitale è:

$$C_3 = R_3 - I_3 = 330 - 30 = 300$$

e il debito estinto e il debito residuo risultano:

$$E_3 = C_1 + C_2 + C_3 = 300 + 400 + 300 = 1000 \qquad D_3 = S - E_3 = 1000 - 1000 = 0$$

A questo punto diventa possibile compilare il piano di ammortamento, che è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	1000
1	300	100	400	300	700
2	400	70	470	700	300
3	300	30	330	1000	–

Si può infine verificare che sono soddisfatte le condizioni di chiusura, in particolare la condizione di chiusura elementare è:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1000$$

mentre la condizione di chiusura finanziaria iniziale è data da:

$$\frac{R_1}{1.10} + \frac{R_2}{1.10^2} + \frac{R_3}{1.10^3} = 1000$$

e la condizione di chiusura finanziaria finale risulta:

$$R_1 \cdot 1.10^2 + R_2 \cdot 1.10 + R_3 = 1000 \cdot 1.10^3$$

Esempio 10.3 *Un finanziamento di* 3000 € *viene rimborsato in* 5 *anni al tasso di interesse del* 15% *annuo composto. Costruire il piano di ammortamento nel caso di rimborso con quote di capitale costanti.*

In questo caso si ha un ammortamento all'italiana, il punto di partenza è allora costituito dalla condizione di chiusura elementare, che viene utilizzata per determinare l'ammontare delle quote di capitale; si ha allora (tenendo presente che queste quote di capitale sono costanti):

$$S = \sum_{t=1}^{5} C \Rightarrow 3000 = 5C \Rightarrow C = 600$$

che rappresenta la generica quota di capitale. A questo punto ci si trova in presenza di un ammortamento in cui il profilo delle quote di capitale è dato (infatti $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 600$), si procede quindi determinando le diverse grandezze secondo l'ordine indicato in precedenza (lo stesso seguito nell'Esempio 10.1), e il piano di ammortamento risulta il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	3000
1	600	450	1050	600	2400
2	600	360	960	1200	1800
3	600	270	870	1800	1200
4	600	180	780	2400	600
5	600	90	690	3000	–

Si può infine verificare che sono soddisfatte le condizioni di chiusura; in particolare, quella elementare è chiaramente rispettata perché è stata utilizzata per determinare l'ammontare delle quote di capitale, mentre la condizione di chiusura finanziaria iniziale è data da:

$$\frac{R_1}{1.15} + \frac{R_2}{1.15^2} + \frac{R_3}{1.15^3} + \frac{R_4}{1.15^4} + \frac{R_5}{1.15^5} = 3000$$

e la condizione di chiusura finanziaria finale risulta:

$$R_1 \cdot 1.15^4 + R_2 \cdot 1.15^3 + R_3 \cdot 1.15^2 + R_4 \cdot 1.15 + R_5 = 3000 \cdot 1.15^5$$

Esempio 10.4 *Risolvere l'esercizio precedente nel caso di rimborso del finanziamento con rate costanti.*

In questo caso si ha un ammortamento alla francese, il punto di partenza è allora costituito dalla condizione di chiusura finanziaria iniziale, che viene utilizzata per determinare l'ammontare delle rate; si ha allora (tenendo presente che queste rate sono costanti):

$$S = \sum_{t=1}^{5} \frac{R}{(1+i)^t} \Rightarrow 3000 = R \cdot a_{5\rceil 0.15} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R = \frac{3000}{a_{5\rceil 0.15}} = \frac{3000}{\dfrac{1-(1+0.15)^{-5}}{0.15}} = \frac{3000}{3.3521} = 894.95$$

che rappresenta la generica rata. A questo punto ci si trova in presenza di un ammortamento in cui il profilo delle rate è dato (infatti $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 894.95$), si procede quindi determinando le diverse grandezze secondo l'ordine indicato in precedenza (lo stesso seguito nell'Esempio 10.2), e il piano di ammortamento risulta il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	3000
1	444.95	450	894.95	444.95	2555.05
2	511.69	383.26	894.95	956.64	2043.36
3	588.45	306.50	894.95	1545.09	1454.91
4	676.71	218.24	894.95	2221.80	778.20
5	778.20	116.73	894.95	3000	–

Si può infine verificare che sono soddisfatte le condizioni di chiusura, in particolare la condizione di chiusura elementare è:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 3000$$

mentre la condizione di chiusura finanziaria iniziale è chiaramente rispettata perché è stata utilizzata per determinare l'ammontare delle rate e la condizione di chiusura finanziaria finale risulta:

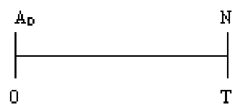
$$R \cdot s_{5\rceil 0.15} = 3000 \cdot 1.15^5$$

10.2. Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)

Una seconda applicazione dei concetti introdotti in precedenza (in particolare del concetto di capitalizzazione semplice) è costituita dai calcoli relativi ai Buoni Ordinari del Tesoro (BOT).

Un BOT (senza tenere conto delle imposte) è un titolo che viene emesso al tempo $t = 0$ ad un prezzo A_0 e dà diritto a riscuotere alla scadenza $t = T$ il valore nominale N. Poiché esso non prevede il pagamento espresso di interessi sotto forma di cedole viene anche detto "zero-coupon bond" (cioè "titolo a cedola zero"), in realtà gli interessi sono costituiti dalla differenza tra il valore nominale e il prezzo di acquisto del titolo, il che consente di determinare il rendimento del titolo stesso.

Considerando innanzitutto il caso in cui il titolo viene acquistato al momento dell'emissione $t = 0$ e viene detenuto fino alla scadenza $t = T$ si ha:



e il rendimento (semplice) del BOT è il tasso di interesse semplice i_0 al quale si impiegano di fatto i mezzi finanziari nel titolo, cioè il tasso che soddisfa la relazione:

$$A_0\,(1 + i_0 T) = N$$

da cui si ottiene:

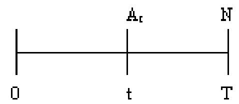
$$i_0 = \frac{N - A_0}{A_0 T}$$

Questo è il rendimento del BOT da 0 a T, e si può osservare come esso sia dato dal rapporto tra l'interesse percepito (uguale alla differenza tra valore nominale e valore di emissione, $N - A_0$) e il prodotto del capitale investito inizialmente (A_0) e del tempo di impiego di questo capitale (T), che rappresenta appunto la formula utilizzata in capitalizzazione semplice per il calcolo del tasso di interesse. Supponendo invece di conoscere il rendimento del buono, la sua scadenza e il suo valore nominale, sempre dalla relazione di partenza diventa possibile determinare il prezzo di emissione, che risulta pari a:

$$A_0 = \frac{N}{1 + i_0 T}$$

ed è il valore attuale (in capitalizzazione semplice) del BOT al tempo $t = 0$.

Supponendo poi che alla data $t < T$ il titolo venga ceduto al prezzo A_t che ha a quella data, per chi acquista il titolo in t si ha:



e il rendimento per l'acquirente è il tasso di interesse semplice i_t che soddisfa la relazione:

$$A_t\left[1 + i_t\left(T - t\right)\right] = N$$

da cui si ottiene:

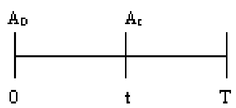
$$i_t = \frac{N - A_t}{A_t(T - t)}$$

Questo è il rendimento del BOT da t a T, e nuovamente esso è dato dal rapporto tra l'interesse percepito (uguale in questo caso alla differenza tra valore nominale e valore di acquisto, $N - A_t$) e il prodotto del capitale investito inizialmente (A_t) e del tempo di impiego di questo capitale ($T - t$). Supponendo invece di conoscere il rendimento del buono, la sua scadenza e il suo valore nominale, diventa possibile determinare il prezzo del titolo in t, che risulta pari a:

$$A_t = \frac{N}{1 + i_t(T - t)}$$

ed è il valore attuale del BOT al tempo t.

Considerando invece la stessa operazione dal punto di vista di chi acquista il titolo al momento dell'emissione e lo cede in t si ha:



e il rendimento ottenuto è il tasso di interesse semplice $i_{0,t}$ che soddisfa la relazione:

$$A_0\left(1 + i_{0,t}t\right) = A_t$$

da cui si ottiene:

$$i_{0,t} = \frac{A_t - A_0}{A_0 t}$$

Questo è il rendimento del BOT da 0 a t (e i tassi i_0 ed i_t ottenuti in precedenza corrispondono, usando quest'ultima notazione, a $i_{0,T}$ e $i_{t,T}$), e anche in questa situazione esso è dato dal rapporto tra l'interesse percepito (uguale in questo caso alla differenza tra prezzo di vendita e prezzo di acquisto, $A_t - A_0$) e il prodotto del capitale investito inizialmente (A_0) e del tempo di impiego di questo capitale (t). È inoltre possibile sostituire ad A_0 e A_t le espressioni prima ricavate, ottenendo:

$$i_{0,t} = \frac{A_t - A_0}{A_0 t} = \frac{\dfrac{N}{1 + i_t(T-t)} - \dfrac{N}{1 + i_0 T}}{\dfrac{N}{1 + i_0 T} t} = \frac{\dfrac{N\,(1 + i_0 T) - N\,[1 + i_t(T-t)]}{[1 + i_t(T-t)]\,[1 + i_0 T]}}{\dfrac{N}{1 + i_0 T} t} =$$

$$= \frac{N + N i_0 T - N - N i_t(T-t)}{[1 + i_t(T-t)]\,[1 + i_0 T]} \cdot \frac{1 + i_0 T}{N t} = \frac{N i_0 T - N i_t(T-t)}{1 + i_t(T-t)} \cdot \frac{1}{N t} =$$

$$= \frac{i_0 T - i_t(T-t)}{t\,[1 + i_t(T-t)]}$$

Da questa formula si può osservare in particolare che se i rendimenti i_0 ed i_t sono uguali ($i_0 = i_t = i$), non è vero che anche il rendimento $i_{0,t}$ è uguale al valore comune i, ma è inferiore, si ha infatti:

$$i_{0,t} = \frac{iT - i(T-t)}{t\,[1 + i(T-t)]} = \frac{iT - iT + it}{t\,[1 + i(T-t)]} = \frac{i}{1 + i(T-t)} < i$$

Questo significa che, acquistando un BOT che fornisce un certo rendimento e vendendolo prima della sua scadenza (a rendimento invariato), il rendimento realizzato è inferiore a quello ottenuto detenendo il titolo fino alla scadenza.

Esempio 10.5 *Si acquista un BOT del valore nominale di* 5000 € *scadente tra* 6 *mesi. Calcolare il rendimento annuo semplice del titolo se il prezzo di acquisto è pari a* 4930 €.

Si ha in questo caso (tenendo presente che, essendo il tasso che si sta cercando un tasso annuo, anche il tempo deve essere espresso in anni):

$$A_0\,(1 + i_0 T) = N \Rightarrow 4930 \left(1 + i_0 \frac{6}{12}\right) = 5000$$

da cui:

$$i_0 = \frac{5000 - 4930}{4930 \cdot \frac{6}{12}} = \frac{70}{2465} = 0.028$$

e quindi il rendimento annuo semplice del titolo è pari al 2.8%.

Esempio 10.6 *Si acquista un BOT del valore nominale di* 2000 € *scadente tra* 1 *anno. Calcolare il prezzo di acquisto se il rendimento annuo semplice del titolo è pari al* 3.5%.

Si ha in questo caso:

$$A_0 = \frac{N}{1 + i_0 T} \Rightarrow A_0 = \frac{2000}{1 + 0.035 \cdot 1} = \frac{2000}{1.035} = 1932.37$$

e quindi il prezzo di acquisto del titolo è pari a 1932.37 €.

Esempio 10.7 *Si acquista un BOT del valore nominale di* 2000 € *che scade tra* 3 *mesi e che fornisce un rendimento annuo semplice del* 5%, *e dopo* 1 *mese lo si rivende (a rendimento invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per* 1 *mese.*

In questo caso il prezzo di acquisto al tempo 0 deve soddisfare la relazione:

$$A_0 \left(1 + 0.05 \cdot \frac{3}{12}\right) = 2000$$

da cui si ottiene:

$$A_0 = \frac{2000}{1 + 0.05 \cdot \frac{3}{12}} = \frac{2000}{1.0125} = 1975.31$$

Il prezzo di vendita dopo 1 mese, poi, deve soddisfare la relazione:

$$A_{\frac{1}{12}} \left(1 + 0.05 \cdot \frac{2}{12}\right) = 2000$$

da cui si ottiene:

$$A_{\frac{1}{12}} = \frac{2000}{1 + 0.05 \cdot \frac{2}{12}} = \frac{2000}{1.0083} = 1983.47$$

Il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 1 mese, infine, è il tasso $i_{0,\frac{1}{12}}$ che soddisfa la relazione:

$$A_0\left(1+i_{0,\frac{1}{12}}\cdot\frac{1}{12}\right)=A_{\frac{1}{12}}$$

da cui si ha:

$$i_{0,\frac{1}{12}}=\frac{A_{\frac{1}{12}}-A_0}{A_0\cdot\dfrac{1}{12}}\Rightarrow i_{0,\frac{1}{12}}=\frac{1983.47-1975.31}{1975.31\cdot\dfrac{1}{12}}=\frac{8.16}{164.61}=0.0496$$

cioè il rendimento realizzato è pari al 4.96%. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando direttamente la formula:

$$i_{0,t}=\frac{i}{1+i(T-t)}$$

da cui si ha:

$$i_{0,\frac{1}{12}}=\frac{0.05}{1+0.05\left(\dfrac{3}{12}-\dfrac{1}{12}\right)}=\frac{0.05}{1.0083}=0.0496$$

Da questo esempio risulta evidente che, acquistando il BOT che fornisce un rendimento annuo del 5% e vendendolo prima della sua scadenza (a rendimento invariato), si realizza un rendimento annuo inferiore al 5% (per la precisione pari al 4.96%).

Esempio 10.8 *Si acquista un BOT del valore nominale di* $1000 \in$ *che scade tra* 6 *mesi e che fornisce un rendimento annuo semplice del* 10%, *e dopo* 2 *mesi lo si rivende. Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita, supponendo che prima che avvenga quest'ultima il rendimento sia salito di mezzo punto percentuale, e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per* 2 *mesi.*

In questo caso il prezzo di acquisto al tempo 0 deve soddisfare la relazione:

$$A_0\left(1+0.10\cdot\frac{6}{12}\right)=1000$$

da cui si ottiene:

$$A_0=\frac{1000}{1+0.10\cdot\dfrac{6}{12}}=\frac{1000}{1.05}=952.38$$

Il prezzo di vendita dopo 2 mesi, poi, deve soddisfare la relazione (tenendo presente che il rendimento per chi acquista il titolo a questa data è passato dal 10% al 10.5%):

$$A_{\frac{2}{12}}\left(1+0.105\cdot\frac{4}{12}\right)=1000$$

da cui si ottiene:

$$A_{\frac{2}{12}}=\frac{1000}{1+0.105\cdot\frac{4}{12}}=\frac{1000}{1.035}=966.18$$

Il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 2 mesi, infine, è il tasso $i_{0,\frac{2}{12}}$ che soddisfa la relazione:

$$A_0\left(1+i_{0,\frac{2}{12}}\cdot\frac{2}{12}\right)=A_{\frac{2}{12}}$$

da cui si ha:

$$i_{0,\frac{2}{12}}=\frac{A_{\frac{2}{12}}-A_0}{A_0\cdot\frac{2}{12}}\Rightarrow i_{0,\frac{2}{12}}=\frac{966.18-952.38}{952.38\cdot\frac{2}{12}}=\frac{13.8}{158.73}=0.0869$$

cioè il rendimento realizzato è pari all'8.69%. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando direttamente la formula:

$$i_{0,t}=\frac{i_0T-i_t(T-t)}{t\,[1+i_t(T-t)]}$$

da cui si ha:

$$i_{0,\frac{2}{12}}=\frac{0.10\cdot\frac{6}{12}-0.105\cdot\left(\frac{6}{12}-\frac{2}{12}\right)}{\frac{2}{12}\cdot\left[1+0.105\cdot\left(\frac{6}{12}-\frac{2}{12}\right)\right]}=\frac{0.015}{0.1725}=0.0869$$

10.3. Titoli a reddito fisso

Una terza applicazione delle nozioni introdotte in precedenza è rappresentata dai calcoli relativi ai titoli a reddito fisso che prevedono il pagamento di cedole periodiche (ad esempio BTP ed obbligazioni).

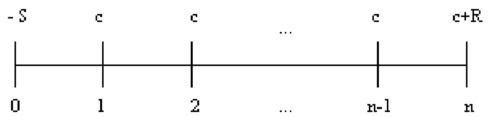
Questi titoli vengono emessi ad una certa data ad un prezzo S (detto corso secco), di solito inferiore al valore nominale N (per cui si dice anche che l'emissione avviene "sotto la pari", mentre se il corso secco è uguale al valore nominale si parla di emissione "alla pari" e se il corso secco è superiore al valore nominale – caso poco frequente – si parla di emissione "sopra la pari"). Essi prevedono poi il pagamento periodico di interessi (detti cedole) e il rimborso alla scadenza di una somma R (maggiore o uguale al valore nominale, per cui si dice anche che il rimborso avviene, rispettivamente, "sopra la pari" oppure "alla pari"). Gli interessi periodici (corrisposti annualmente oppure semestralmente) vengono calcolati sul valore nominale, utilizzando un tasso di interesse i (detto tasso cedolare). Nel caso di titoli con cedole annue l'ammontare di tali cedole è:

$$c = Ni$$

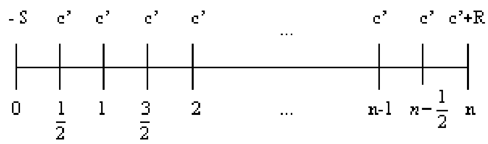
mentre nel caso di titoli con cedole semestrali l'ammontare delle cedole è:

$$c' = \frac{Ni}{2}$$

In definitiva, un titolo con cedole annuali scadente dopo n anni dà origine per chi lo acquista ai seguenti flussi di cassa:



mentre un titolo con cedole semestrali, scadente sempre dopo n anni, dà origine ai seguenti flussi di cassa:



Con riferimento a questo tipo di titoli si possono introdurre diverse nozioni di rendimento. La prima è quella espressa dal tasso di interesse i utilizzato per il calcolo degli interessi corrisposti periodicamente, e tale tasso prende il nome di tasso cedolare (appunto perché viene usato per determinare l'ammontare delle cedole). Risolvendo rispetto ad i le formule prima introdotte si ha che nel caso di un titolo che paga cedole annue di ammontare c il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{c}{N}$$

mentre nel caso di un titolo che paga cedole semestrali di ammontare c' esso è dato da:

$$i = \frac{2c'}{N}$$

Una diversa nozione di rendimento è invece quella espressa dal cosiddetto rendimento immediato, che viene calcolato utilizzando il corso secco. Per un titolo che paga cedole annue di ammontare c esso è dato da:

$$r = \frac{c}{S}$$

mentre per un titolo che paga cedole semestrali di ammontare c' esso è dato da:

$$r = \left(1 + \frac{c'}{S}\right)^2 - 1$$

Un'ultima nozione è quella espressa dal rendimento effettivo, che è il tasso x^* che annulla il DCF dell'operazione considerata dal punto di vista di chi acquista il titolo (quindi è il tasso interno di tale operazione). Nel caso di un titolo che paga cedole annue il DCF è dato da:

$$G(x) = -S + \frac{c}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} + ... + \frac{c}{(1+x)^{n-1}} + \frac{c+R}{(1+x)^n}$$

mentre nel caso di un titolo che paga cedole semestrali il DCF è:

$$G(x) = -S + \frac{c'}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c'}{1+x} + ... + \frac{c'}{(1+x)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{c'+R}{(1+x)^n}$$

e il tasso di rendimento effettivo del titolo è il tasso x^* tale che $G(x^*) = 0$.

Va inoltre osservato che, qualora il titolo venga acquistato non all'inizio di un periodo di maturazione della cedola ma nel corso di tale periodo, l'acquirente (che alla scadenza del periodo stesso incasserà la cedola intera) deve anche versare, in aggiunta al corso secco, la parte di cedola maturata fino a quel momento (detta rateo di interessi). Il prezzo del titolo comprensivo del rateo di interessi prende il nome di corso tel quel Q, e si ha:

$$Q = S + \text{rateo di interessi} = S + Nip$$

dove p è il tempo (espresso in anni, poiché i è un tasso annuo) per il quale non si ha diritto agli interessi. In questo caso, inoltre, nel calcolo del DCF dell'operazione (e quindi del rendimento effettivo del titolo) si deve tenere conto del corso tel quel anziché del corso secco, in quanto è il primo (e non il secondo) che rappresenta l'esborso iniziale effettivo del soggetto che acquista e detiene il titolo.

Esempio 10.9 *Un titolo, del valore nominale di* 1000 €*, viene acquistato al prezzo di* 960 €*. Calcolare il tasso cedolare e il rendimento immediato del titolo nell'ipotesi che esso paghi cedole annue pari a* 120 €*.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{120}{1000} = 0.12 = 12\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \frac{120}{960} = 0.125 = 12.5\%$$

Esempio 10.10 *Un titolo, del valore nominale di* 1500 €*, viene acquistato al prezzo di* 1410 €*. Calcolare il tasso cedolare e il rendimento immediato del titolo nell'ipotesi che esso paghi cedole semestrali pari a* 85 €*.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{2 \cdot 85}{1500} = 0.1134 = 11.34\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \left(1 + \frac{85}{1410}\right)^2 - 1 = 0.1242 = 12.42\%$$

Esempio 10.11 *Un titolo del valore nominale di* 1000 €*, scadente tra* 2 *anni, viene acquistato al prezzo di* 990 €*. Supponendo che esso preveda il pagamento di cedole annue di* 100 € *e che abbia un valore di rimborso di* 1010 €*, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo del titolo.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{100}{1000} = 0.10 = 10\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \frac{100}{990} = 0.101 = 10.1\%$$

e il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione:

$$-990 + \frac{100}{1+x} + \frac{1110}{(1+x)^2} = 0$$

da cui si ottiene:

$$x = 0.1106 = 11.06\%$$

Esempio 10.12 *Un titolo del valore nominale di* 2000 €*, scadente tra* 1 *anno, viene acquistato al prezzo di* 1900 €*. Supponendo che esso preveda il pagamento di cedole semestrali di* 80 € *e che abbia un valore di rimborso di* 2010 €*, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo del titolo.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{2 \cdot 80}{2000} = 0.08 = 8\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \left(1 + \frac{80}{1900}\right)^2 - 1 = 0.086 = 8.6\%$$

e il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione:

$$-1900 + \frac{80}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2090}{1+x} = 0$$

da cui si ottiene:

$$x = 0.1451 = 14.51\%$$

Esempio 10.13 *Un'obbligazione del valore nominale di* 1500 €*, scadente* 2 *anni dopo l'emissione, viene acquistata al prezzo di* 1400 € 2 *mesi dopo l'emissione. Supponendo che il titolo paghi cedole annue di* 60 € *e che abbia un valore di rimborso di* 1510 €*, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo dell'obbligazione.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{60}{1500} = 0.04 = 4\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \frac{60}{1400} = 0.0429 = 4.29\%$$

Per il calcolo del rendimento effettivo si deve tenere presente che il titolo viene acquistato 2 mesi dopo l'emissione (quindi 10 mesi prima della riscossione della prima cedola), per cui il corso secco va aumentato del rateo di interessi (calcolato per 2 mesi al tasso annuo del 4% prima trovato); si ottiene così il corso tel quel, pari a:

$$Q = 1400 + 1500 \cdot 0.04 \cdot \frac{2}{12} = 1410$$

e a questo punto il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione:

$$-1410 + \frac{60}{(1+x)^{\frac{10}{12}}} + \frac{1570}{(1+x)^{\frac{22}{12}}} = 0$$

e numericamente si trova:

$$x = 0.0841 = 8.41\%$$

Esempio 10.14 *Un'obbligazione del valore nominale di* 1000 €*, scadente* 1 *anno e mezzo dopo l'emissione, viene acquistata* 5 *mesi dopo l'emissione al prezzo di* 980 €*. Supponendo che il titolo paghi cedole semestrali di* 50 € *e che abbia un valore di rimborso di* 1005 €*, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo dell'obbligazione.*

In questo caso il tasso cedolare è dato da:

$$i = \frac{2 \cdot 50}{1000} = 0.10 = 10\%$$

mentre il rendimento immediato è dato da:

$$r = \left(1 + \frac{50}{980}\right)^2 - 1 = 0.1046 = 10.46\%$$

Per il calcolo del rendimento effettivo si deve tenere presente che il titolo viene acquistato 5 mesi dopo l'emissione (quindi 1 mese prima della riscossione della prima cedola), per cui il corso secco va aumentato del rateo di interessi (calcolato per 5 mesi al tasso annuo del 10% prima trovato); si ottiene così il corso tel quel, pari a:

$$Q = 980 + 1000 \cdot 0.10 \cdot \frac{5}{12} = 1021.67$$

e a questo punto il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione:

$$-1021.67 + \frac{50}{(1+x)^{\frac{1}{12}}} + \frac{50}{(1+x)^{\frac{7}{12}}} + \frac{1055}{(1+x)^{\frac{13}{12}}} = 0$$

e numericamente si trova:

$$x = 0.1284 = 12.84\%$$

10.4. Esercizi da svolgere

Risolvere i seguenti problemi relativi agli ammortamenti:

1) Un prestito di 5000 € viene rimborsato in 3 anni pagando, a titolo di quote di capitale, 2000 € dopo 1 e 2 anni e 1000 € dopo 3 anni. Redigere il piano di ammortamento dato il tasso di interesse del 15% annuo composto.

2) Un soggetto contrae un prestito di 1000 €. Si impegna a rimborsarlo pagando dopo 1 e 2 anni la somma di 300 € e dopo 3 anni l'ammontare R. Le parti concordano che il tasso annuo composto del prestito sia $i = 10\%$. Si calcoli R e si compili il piano di ammortamento.

3) Per rimborsare un debito di 1200 € si ricorre ad un ammortamento a quote di capitale costanti. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che il rimborso avvenga con 3 rate annue, al tasso annuo composto del 10%.

4) Un prestito di 10000 € viene rimborsato attraverso il versamento di 3 rate annuali. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che quest'ultimo preveda il versamento di rate costanti e che il tasso di interesse applicato sia del 15% annuo composto.

5) Un soggetto contrae un mutuo di 10000 ∈ , che si impegna a rimborsare pagando dopo 1, 2 e 3 anni la somma di 2000 ∈ e dopo 4 anni l'ammontare R. Le parti concordano che il tasso annuo composto del mutuo sia $i = 10\%$. Si calcoli R e si compili il piano di ammortamento.

6) Un finanziamento di 3000 ∈ viene rimborsato in 3 anni al tasso di interesse del 5% annuo composto. Costruire il piano di ammortamento nel caso di rimborso con quote di capitale costanti.

7) Un'azienda contrae un prestito di 1000 ∈ che si impegna a rimborsare in 4 anni, pagando dopo 1, 2 e 3 anni la somma di 300 ∈ e dopo 4 anni la somma R. Calcolare R e redigere il piano di ammortamento sapendo che il tasso contrattuale è pari al 10% annuo composto.

8) Un prestito di 10000 ∈ viene rimborsato attraverso il versamento di 4 rate annuali. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che quest'ultimo preveda il versamento di quote di capitale costanti e che il tasso di interesse applicato sia del 10% annuo composto.

9) Un prestito di 2000 ∈ viene rimborsato pagando dopo 1 anno la somma di 1200 ∈, dopo 2 anni la somma di 600 ∈ e dopo 3 anni l'ammontare R. Calcolare R e redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che il tasso annuo composto applicato sia pari al 10%.

10) Per rimborsare un debito di 2000 ∈ si ricorre ad un ammortamento a quote di capitale costanti. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che il rimborso avvenga con 4 rate annue, al tasso annuo composto del 10%.

11) Un soggetto contrae un mutuo di 12000 ∈, che si impegna a rimborsare in 4 anni ricorrendo ad un ammortamento a quote di capitale costanti. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che il tasso annuo composto del mutuo concordato tra le parti sia del 10%.

12) Un prestito di 5000 ∈ viene rimborsato attraverso il versamento di 4 rate annuali. Redigere il piano di ammortamento nell'ipotesi che quest'ultimo preveda il versamento di rate costanti e che il tasso di interesse applicato sia del 15% annuo composto.

Risovere i seguenti problemi relativi ai Buoni Ordinari del Tesoro:

13) Si acquista un BOT del valore nominale di 10000 € scadente tra 1 anno. Calcolare il rendimento annuo semplice del titolo se il prezzo di acquisto è pari a 9700 €.

14) Si acquista un BOT del valore nominale di 5000 € scadente tra 3 mesi. Calcolare il rendimento annuo semplice del titolo se il prezzo di acquisto è pari a 4950 €.

15) Si acquista un BOT del valore nominale di 3000 € scadente tra 1 anno. Calcolare il prezzo di acquisto se il rendimento annuo semplice del titolo è pari al 2.5%.

16) Si acquista un BOT del valore nominale di 6000 € scadente tra 6 mesi. Calcolare il prezzo di acquisto se il rendimento annuo semplice del titolo è pari al 4%.

17) Si acquista un BOT del valore nominale di 1000 € che scade tra 1 anno e che fornisce un rendimento annuo semplice del 2%, e dopo 6 mesi lo si rivende (a rendimento invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 6 mesi.

18) Si acquista un BOT del valore nominale di 5000 € che scade tra 6 mesi e che fornisce un rendimento annuo semplice del 3%, e dopo 4 mesi lo si rivende (a rendimento invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 4 mesi.

19) Si acquista un BOT del valore nominale di 2000 € che scade tra 1 anno e mezzo e che fornisce un rendimento annuo semplice del 3.5%, e dopo 1 anno lo si rivende (a rendimento invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 1 anno.

20) Si acquista un BOT del valore nominale di 2000 € che scade tra 1 anno e che fornisce un rendimento annuo semplice del 6%, e dopo 8 mesi lo si rivende. Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita, supponendo che prima che avvenga quest'ultima il rendimento sia salito di mezzo punto percentuale, e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 8 mesi.

21) Si acquista un BOT del valore nominale di 5000 € che scade tra 6 mesi e che fornisce un rendimento annuo semplice del 4%, e dopo 4 mesi lo si rivende. Calcolare il

prezzo di acquisto e il prezzo di vendita, supponendo che prima che avvenga quest'ultima il rendimento sia sceso di mezzo punto percentuale, e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 4 mesi.

22) Si acquista un BOT del valore nominale di 10000 € che scade tra 1 anno e mezzo e che fornisce un rendimento annuo semplice del 3%, e dopo 6 mesi lo si rivende. Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita, supponendo che prima che avvenga quest'ultima il rendimento sia salito di un quarto di punto percentuale, e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 6 mesi.

Risolvere i seguenti problemi relativi ai titoli a reddito fisso con cedole:

23) Un titolo del valore nominale di 500 €, acquistato al prezzo di 450 €, paga cedole annue pari a 30 €. Calcolare il tasso cedolare e il rendimento immediato del titolo.

24) Un titolo del valore nominale di 100 €, acquistato al prezzo di 90 €, paga cedole semestrali pari a 2 €. Calcolare il tasso cedolare e il rendimento immediato del titolo.

25) Un titolo del valore nominale di 2000 €, scadente tra 2 anni, viene acquistato al prezzo di 1970 €. Supponendo che il titolo preveda il pagamento di cedole annue al tasso nominale del 10% e che abbia un valore di rimborso di 2010 €, calcolare il rendimento immediato e il rendimento effettivo del titolo.

26) Un titolo del valore nominale di 1000 €, scadente tra 3 anni, viene acquistato al prezzo di 980 €. Supponendo che il titolo preveda il pagamento di cedole semestrali di 60 € e che abbia un valore di rimborso di 1005 €, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo del titolo.

27) Un titolo del valore nominale di 1000 €, scadente 2 anni dopo l'emissione, viene acquistato 3 mesi dopo l'emissione al prezzo di 980 €. Supponendo che il titolo paghi cedole annue al tasso nominale del 5% e che abbia un valore di rimborso di 1010 €, calcolare il rendimento immediato e il rendimento effettivo del titolo.

28) Un'obbligazione del valore nominale di 2000 €, scadente 2 anni dopo l'emissione, viene acquistata 2 mesi dopo l'emissione al prezzo di 1900 €. Supponendo che il titolo paghi cedole semestrali di 100 € e che abbia un valore di rimborso di 2005 €, calcolare il tasso cedolare, il rendimento immediato e il rendimento effettivo dell'obbligazione.

29) Un titolo a reddito fisso, scadente dopo 1 anno, viene acquistato sotto la pari (cioè $S < N$), paga cedole annue di ammontare c e alla scadenza viene rimborsato alla pari (cioè $R = N$). Stabilire la relazione esistente tra il tasso cedolare i, il tasso di rendimento immediato r e il tasso di rendimento effettivo j di questo titolo.

30) Un titolo a reddito fisso, scadente dopo 1 anno, viene acquistato sopra la pari (cioè $S > N$), paga cedole annue di ammontare c e alla scadenza viene rimborsato alla pari (cioè $R = N$). Stabilire la relazione esistente tra il tasso cedolare i, il tasso di rendimento immediato r e il tasso di rendimento effettivo j di questo titolo.

Capitolo 11

Soluzioni degli esercizi

11.1. Esercizi Capitolo 1

1) $x < -1$

2) $x \geq -7$

3) $x < -7 \quad \vee \quad x > 3$

4) $0 \leq x \leq 5$

5) $x \neq 3$

6) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

7) $-\frac{1}{2} \leq x < 3$

8) $x > 0$

9) $x \leq -5 \quad \vee \quad x = 3$

10) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

11) $-6 \leq x < \dfrac{7}{2}$

12) $-1 < x < 1$

13) $3 < x \leq 5$

14) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

15) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

16) $x \neq 2$

17) $x > 1$

18) $-5 \quad \vee \quad -2 < x < 2$

19) $x \geq 2$

20) $x > 4$

21) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

22) $x \geq -1$

23) $-2 < x < 7$

24) $x > -\dfrac{17}{9}$

25) $x < -3 \quad \vee \quad x > 3$

26) $1 < x \leq 10$

27) $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4$

28) $x < 0$

29) $x \geq \dfrac{\log 4 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$

30) $x < -\dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3}$

11.2. Esercizi Capitolo 2

1) $D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

2) $D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$

3) $D = \mathbb{R}$

4) $D = [2, +\infty)$

5) $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

6) $D = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$

7) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

8) $D = \emptyset$ (insieme vuoto)

9) $D = (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

10) $D = (0, 2]$

11) f interseca l'asse x nel punto $(e^3, 0)$ mentre non interseca l'asse y, inoltre $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D = (0, +\infty)$.

12) f non interseca l'asse x mentre interseca l'asse y nel punto $(0, e^2)$, inoltre $f(x) > 0$ $\forall x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

13) f interseca l'asse x nei punti $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 4)$, inoltre $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D = \mathbb{R}$.

14) f non interseca l'asse x mentre interseca l'asse y nel punto $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, inoltre $f(x) < 0$ per $x < -2$ e $f(x) > 0$ per $x > -2$ (tenendo presente che il dominio è dato da $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$).

15) f interseca l'asse x nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 3)$, inoltre $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D = \mathbb{R}$.

16) f è dispari.

17) f è pari e periodica di periodo π.

18) f è dispari.

19) f è pari.

20) f non è né pari né dispari.

21) $f \circ g = f(g(t)) = t$ mentre $g \circ f = g(f(x)) = x$.

22) $f \circ g = f(g(t)) = t + 2$ mentre $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{x^3 + 2}$.

23) $f \circ g = f(g(t)) = \log e^{t+3} = t + 3$ mentre $g \circ f = g(f(x)) = e^{\log x + 3} = xe^3$ per $x > 0$.

24) $f \circ g = f(g(x)) = \log |x - 2|$ $\forall x \neq 2$ mentre $g \circ f = g(f(t)) = |\log t - 2|$ per $t > 0$.

25) $f \circ g = f(g(x)) = \log(e^x + 1)$ mentre $g \circ f = g(f(t)) = e^{\log(t+1)} = t + 1$ per $t > -1$.

26) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

27) $f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad$ per $x \geq 0$

28) L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0)$ è $f^{-1}(x) = -e^x$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$ è $f^{-1}(x) = e^x$.

29) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{se} \quad x < -1 \\ \sqrt[3]{e^x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

30) L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, -3]$ è $f^{-1}(x) = -x^2$ se $x \geq \sqrt{3}$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-3, 3)$ è $f^{-1}(x) = x - 3$ se $0 < x < 6$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $[3, +\infty)$ è $f^{-1}(x) = e^x$ se $x \geq \log 3$.

11.3. Esercizi Capitolo 3

1) $\frac{1}{2}$

2) 5

3) 0^+

4) 1

5) $+\infty$

6) 0^-

7) $\frac{1}{2}$

8) 2

9) 0

10) 2

11) 0^+

12) $+\infty$

13) 3

14) 0

15) 0

16) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 2$ e asintoto verticale $x = 1$.

17) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 1$ e asintoto verticale $x = 1$.

18) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 1$ e asintoto verticale $x = 3$.

19) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$) $y = 0$ e asintoto verticale $x = 1$.

20) $f(x)$ ammette asintoto verticale $x = -3$ e asintoto obliquo $y = x + 2$.

21) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) $y = 0$ e asintoto obliquo (per $x \to -\infty$) $y = -2x$.

22) $f(x)$ ammette asintoto verticale (sinistro) $x = 0$ e asintoto obliquo $y = x - 2$.

23) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = e$ e asintoto verticale (sinistro) $x = 1$.

24) $f(x)$ ammette asintoto verticale $x = -3$ e asintoto obliquo $y = x - 1$.

25) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoti verticali $x = -2$ e $x = 0$.

26) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = 0$.

27) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = \beta$.

28) $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ per qualsiasi valore di α, ma non è continua in $x = 1$ per nessun valore reale di α.

29) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore reale di α.

30) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$.

11.4. Esercizi Capitolo 4

1) $f'(x) = \dfrac{4-x}{x(2-x)}$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\log 3x)^2}$

3) $f'(x) = e^{-2x}\dfrac{1-6x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4) $f'(x) = \dfrac{3e^{\frac{4-x}{1-x}}}{(1-x)^2}$

5) $f'(x) = (xe^x)^x\left[x+1+\log(xe^x)\right]$

6) $D\left[f^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right)\right] = \dfrac{1}{2}e$

7) $D\left[f^{-1}(\log 3)\right] = -\dfrac{3}{2}$

8) $D\left[f^{-1}(e)\right] = \dfrac{2}{e}$

9) $D\left[f^{-1}(e)\right] = \dfrac{1}{2e}$

10) $D\left[f^{-1}\left(e^3\right)\right] = \dfrac{1}{2e^3}$

11) $y = 6x+1$

12) $y = 6x-1$

13) $y = -\dfrac{1}{2}x+3$

14) $y = \dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

15) $y = \dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$

16) f è continua e derivabile $\forall x \neq 1$, inoltre è continua e derivabile anche in $x = 1$ se $\alpha = \beta$.

17) f è continua e derivabile $\forall x \neq 0$, inoltre è continua anche in $x = 0$ se $\beta = 3$ ed è derivabile anche in $x = 0$ se $\alpha = -2$ e $\beta = 3$.

18) f è strettamente crescente sugli intervalli $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $(1, +\infty)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, inoltre ha un massimo in $x = \frac{1}{3}$ e un minimo in $x = 1$.

19) f è strettamente crescente sull'intervallo considerato $[1, 2]$, inoltre ha un minimo in $x = 1$ e un massimo in $x = 2$.

20) f è strettamente crescente sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, inoltre ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = \frac{1}{3}$.

21) f è strettamente decrescente sull'intervallo considerato $[0, 1]$, inoltre ha un massimo in $x = 0$ e un minimo in $x = 1$.

22) f è strettamente crescente sul proprio dominio $(0, +\infty)$, inoltre non ha né minimo né massimo.

23) f è strettamente convessa sugli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$ e strettamente concava sull'intervallo $(-1, 0)$, inoltre ha un flesso in $x = -1$ e in $x = 0$.

24) f è strettamente concava sull'intervallo $(-\infty, -3)$ e strettamente convessa sull'intervallo $(-3, +\infty)$, inoltre in questo caso il punto $x = -3$ non è un flesso (perché qui la funzione non è definita).

25) $f(x) = x + o((x-1)^2)$

26) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

27) $f(x) = -\frac{e}{2} + \frac{e}{2}x^2 + o((x-1)^2)$

28) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

29) Si ha in questo caso:

$$f(x) = e^{-x^2+\log x+2} = xe^{-x^2+2}$$

• Dominio della funzione

Deve essere $x > 0$, quindi il dominio è:

$$D = (0, +\infty)$$

• Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

Si ha $f(x) > 0 \ \ \forall x \in D$, inoltre non vi sono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione non presenta simmetrie.

• Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x^2+2} = 0^+$$

e poi:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x^2-2}} = 0^+$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale

• Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima è:

$$f'(x) = -2x^2e^{-x^2+2} + e^{-x^2+2} = \left(-2x^2 + 1\right) e^{-x^2+2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello di $\left(-2x^2 + 1\right)$, si ha allora:

$$f'(x) < 0 \qquad \text{per} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e il punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di massimo assoluto.

- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda è:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2x(-2x^2+1)e^{-x^2+2} - 4xe^{-x^2+2} = \\ &= 2x(2x^2-3)e^{-x^2+2} \end{aligned}$$

Il segno di $f''(x)$ dipende solo da quello di $\big(2x^2-3\big)$, si ha allora:

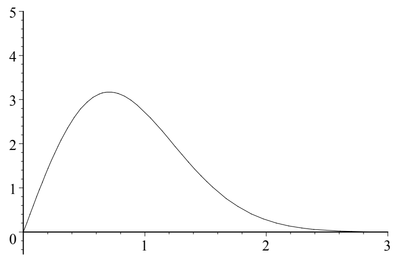
$$f''(x) < 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad x > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

per cui $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e strettamente convessa sull'intervallo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ e il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di flesso.

- Grafico della funzione



30) Si ha in questo caso:

$$f(x) = \frac{e^{|x|-3}}{x}$$

- Dominio della funzione

Deve essere $x \neq 0$, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

È possibile innanzitutto osservare che vale:

$$f(-x) = \frac{e^{|-x|-3}}{-x} = -\frac{e^{|x|-3}}{x} = -f(x)$$

per cui $f(x)$ è dispari. È allora sufficiente studiarla per $x > 0$ (in quanto il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine), dove $f(x) = \frac{e^{x-3}}{x}$. Si ha $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ e non vi sono intersezioni con gli assi cartesiani.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x-3}}{x} = +\infty$$

per cui $x = 0$ è un asintoto verticale, inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2} = +\infty$$

per cui non vi sono asintoti obliqui.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima (per $x > 0$) è:

$$f'(x) = \frac{xe^{x-3} - e^{x-3}}{x^2} = \frac{e^{x-3}(x-1)}{x^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello di $x-1$, si ha allora (sull'intervallo $(0, +\infty)$):

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, 1)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$, inoltre $x = 1$ è un punto di minimo relativo (e quindi $x = -1$ è un punto di massimo relativo).

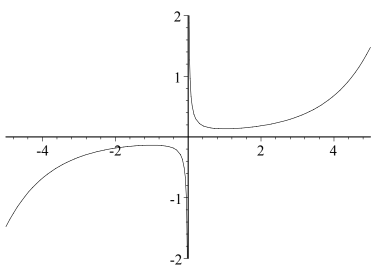
- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda (per $x > 0$) è:

$$f''(x) = \frac{x^2\left[e^{x-3} + e^{x-3}(x-1)\right] - 2xe^{x-3}(x-1)}{x^4} = \frac{xe^{x-3}(x^2 - 2x + 2)}{x^4} =$$
$$= \frac{e^{x-3}(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

per la quale si ha (sull'intervallo $(0, +\infty)$) $f''(x) > 0$ per $x > 0$, per cui $f(x)$ è strettamente convessa sull'intervallo $(0, +\infty)$.

- Grafico della funzione



11.5. Esercizi Capitolo 5

1) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

2) $x^2 + 2x\sqrt{x} - 4\log|x| + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 10\sqrt{x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

4) $-e^{\cos x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

5) $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

6) $\frac{1}{2}\log^2 x + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

7) $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

8) $arctg\,(e^x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

9) $e^{-x}(-x-2) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

10) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

11) $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + 6$

12) $F(x) = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 + 1$

13) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \log|x| + \frac{1}{3}$

14) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

15) $F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} - 3 - 2e$

16) $F(x) = \log\left|x^2 - x - 1\right| - 1$

17) $F(x) = e^{\sin x} + 1$

18) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{1}{2}e^{-1}$

19) $e - 1$

20) $\frac{1}{3}$

21) $2\,(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

22) $\log 10$

23) $\frac{7}{6}$

24) $\dfrac{e^5(\sin 5 - \cos 5) + 1}{2}$

25) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

26) e^2

27) $\frac{9}{4}$

28) $2\log 2 - \frac{3}{4}$

29) L'area è uguale a 1 per $\alpha = 3$.

30) L'area è uguale a 2 per $\alpha = \log 2$.

11.6. Esercizi Capitolo 6

1) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$

2) $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$

3) $\mathbf{x} > \mathbf{y}$

4) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono confrontabili.

5) $\mathbf{x} < \mathbf{y}$

6) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -2 \qquad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0 \qquad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

8) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0 \qquad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -4 \qquad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

10) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -10 \qquad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

11) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = -\frac{6}{5}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{5}$ e $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{34}$.

12) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{14}$ e $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{5}$.

13) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -\frac{1}{3}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{14}$ e $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$.

14) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono mai ortogonali; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{6}$ e $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$.

15) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = 0$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = 1$ e $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$.

16) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

17) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

18) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

19) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti per $\alpha = 2$ e linearmente indipendenti per $\alpha \neq 2$.

20) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti per $\alpha = 0$ e linearmente indipendenti per $\alpha \neq 0$.

21) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

22) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

23) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

24) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

25) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

26) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

27) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

28) $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 31 \\ 11 & 3 & 40 \end{pmatrix}$ $\qquad BA$ non esiste

29) AB non esiste $\qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

30) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

11.7. Esercizi Capitolo 7

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \ \vee \ \ (x \leq 0 \ \wedge \ y \leq 0)\}$

2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$

3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \ \vee \ \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)\}$

4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$

5) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \ \vee \ \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)) \wedge y \neq \frac{1}{x}\right\}$

6) $D = \mathbb{R}^2$

7) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y > 0\}$

8) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \vee \ y \neq 0\}$

9) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y > 0\}$

10) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \ \vee \ \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)\}$

11) $\nabla f(1, 0) = (1 \quad 1) \qquad \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\nabla f(1, 0) = (-6 \quad 1) \qquad \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\nabla f(1, 1) = (e \quad e) \qquad \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

14) $\nabla f(2, 2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(2, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$

15) $\nabla f(1, 1) = (0 \quad 0) \qquad \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

16) $df(0,1) = dx + 2dy$

17) $df(2,-2) = \frac{3}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

18) $df(0,1) = dx + edy$

19) $df(3,4) = \frac{3}{5}dx + \frac{4}{5}dy$

20) $df(2,2) = \frac{3}{8}dx - \frac{1}{8}dy$

21) $z = x - 2y$

22) $z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$

23) $z = x + y + 2$

24) $z = x + y - 2$

25) $z = -x - y + 2$

26) La funzione ha un massimo relativo in $A = (-2,0)$, mentre non vi sono minimi relativi.

27) La funzione ha un minimo relativo in $A = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e un altro minimo relativo in $B = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, mentre non vi sono massimi relativi.

28) La funzione ha una sella in $A = (-1,1)$ e un'altra sella in $B = (1,1)$, mentre non vi sono né massimi né minimi relativi.

29) La funzione ha un minimo relativo in $A = \left(\sqrt[3]{9}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, mentre non vi sono massimi relativi.

30) La funzione ha un massimo relativo in $A = \left(-\frac{33}{10}, \frac{5}{2}\right)$, mentre non vi sono minimi relativi.

11.8. Esercizi Capitolo 8

1) $i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 = 0.0287 \qquad j_4 = 4 \cdot i_4 = 0.1149$

2) $i_4 = \dfrac{i}{4} = 0.03$

3) $i = \left(1 + \dfrac{j_4}{4}\right)^4 - 1 = 0.1255$

4) $d_6 = \dfrac{d}{6} = 0.02$

5) $i_{12} = \sqrt{1+i_6} - 1 = 0.0099$

6) $i_6 = 2 \cdot i_{12} = 0.02$

7) $i_3 = \dfrac{i}{3} = 0.04$

8) $i_2 = \sqrt{1+i} - 1 = 0.0583$

9) $i = (1+i_2)^2 - 1 = 0.1236$

10) $d = 12 \cdot d_{12} = 0.12$

11) Si ha $M = 1 \cdot (1 + 0.10 \cdot 2) - 2 \cdot 0.10 \cdot (1 \cdot 0.10 \cdot 1) = 1.20 - 0.02 = 1.18$.

12) Poiché $\left(1 + 0.2 \cdot \dfrac{6}{12}\right) > \sqrt{1+0.2}$ l'impiego a interessi semplici è più conveniente.

13) Deve essere $\left(1 + 0.14 \cdot \dfrac{6}{12}\right) > \left(1 + 0.12 \cdot \dfrac{2}{12}\right)\left(1 + j \cdot \dfrac{4}{12}\right)$, da cui si ottiene $j < 3 \cdot \dfrac{0.05}{1.02} = 0.1470$.

14) Deve essere $C(1+0.05)^{2t} = 2C$ da cui si ottiene $t = \dfrac{\log 2}{2 \log 1.05}$ anni.

15) Deve essere $C\,(1 + 0.05 \cdot 2t) = 2C$ da cui si ottiene $t = 10$ anni.

16) Deve essere $\dfrac{C}{1-0.05t} = 2C$ da cui si ottiene $t = 10$ anni.

17) $A = 2000\left(1 - d\dfrac{6}{12}\right)$ con $d = \dfrac{0.04}{1+0.04}$ cioè $A = 1961.54$

18) $A = 1000\left(1 - 0.05\dfrac{6}{12}\right) = 975$

19) $M = 100(1+0.01)^{12} + 200(1+0.01)^{6} = 324.99$

20) $M = 100(1+0.05)^{2} + 200(1+0.05) = 320.25$

21) $M = 100(1+0.04)^{4} + 150(1+0.04)^{2} = 279.23$

22) $M = R \cdot \ddot{s}_{12\rceil i_{12}} = 100\dfrac{(1+0.015)^{12}-1}{\frac{0.015}{1.015}} = 1323.68$

23) $M = R \cdot s_{12\rceil i_{12}} = 100\dfrac{(1+0.015)^{12}-1}{0.015} = 1304.12$

24) $M = R \cdot \ddot{s}_{6\rceil i_{12}} = 50\dfrac{(1+0.01)^{6}-1}{\frac{0.01}{1.01}} = 310.68$

25) Deve essere $7000 = R \cdot a_{5\rceil i_2}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{7000}{a_{5\rceil 0.10}} = 1846.58$.

26) Deve essere $8000 = R \cdot a_{5\rceil i_2}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{8000}{a_{5\rceil(\sqrt{1.2}-1)}} = 2085.88$.

27) Deve essere $4000 = R \cdot a_{6\rceil i_6}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{4000}{a_{6\rceil(\sqrt[6]{1.12}-1)}} = 711.86$.

28) Deve essere $10000 = R \cdot a_{6\rceil i_6}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{10000}{a_{6\rceil(\sqrt[6]{1.12}-1)}} = 1779.64$.

29) Deve essere $5000 = R \cdot a_{5\rceil i_2}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{5000}{a_{5\rceil 0.10}} = 1318.99$.

30) Deve essere $9000 = R \cdot a_{6\rceil i_{12}}$ da cui si ottiene $R = \dfrac{9000}{a_{6\rceil(\sqrt[12]{1.12}-1)}} = 1550.21$.

11.9. Esercizi Capitolo 9

1) Il VAN dell'operazione è $G(0.10) = 100 - \dfrac{200}{1.10} + \dfrac{100}{1.10^2} = 0.83$.

2) Il VAN dell'operazione è $G(0.05) = -100 + \dfrac{100}{(1.05)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{100}{1.05} = 92.83$.

3) Il VAN dell'operazione è $G(0.03) = 50 - \dfrac{100}{(1.03)^{\frac{3}{12}}} + \dfrac{150}{(1.03)^{\frac{6}{12}}} = 98.54$.

4) Si ha $G(x) = -500 + \dfrac{600}{1+x} = 0$ per $x = 0.20$, quindi il TIR è pari al 20% annuo.

5) Si ha $G(x) = -1000 + \dfrac{660}{1+x} + \dfrac{484}{(1+x)^2} = 0$ per $x = 0.10$, quindi il TIR è pari al 10% annuo.

6) Si ha $G(x) = -500 + \dfrac{220}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{363}{1+x} = 0$ per $x = 0.21$, quindi il TIR è pari al 21% annuo.

7) Poiché $VAN_B > VAN_A$ l'operazione B risulta preferibile.

8) Poiché $TIR_A < TIR_B$ l'operazione A risulta preferibile se si tratta di finanziamenti, mentre l'operazione B risulta preferibile se si tratta di investimenti.

9) Un soggetto che valuta in base al criterio del tasso interno sceglie l'operazione con TIR più basso nel caso di finanziamenti e l'operazione con TIR più alto nel caso di investimenti.

10) Un soggetto che valuta in base al criterio del valore attuale netto sceglie l'operazione con VAN più alto sia nel caso di finanziamenti sia nel caso di investimenti.

11) Si ha $G_A(0.06) = -1500 + \dfrac{1605}{1.06} = 14.15$ e $G_B(0.06) = -300 + \dfrac{324}{1.06} = 5.66$ e poiché $G_A(0.06) > G_B(0.06)$ il soggetto sceglie l'operazione A.

12) Si ha $G_A(x) = -1500 + \dfrac{1605}{1+x} = 0$ per $x = 0.07$ e $G_B(x) = -300 + \dfrac{324}{1+x} = 0$ per $x = 0.08$, quindi $TIR_B > TIR_A$ e poiché si tratta di due operazioni di investimento il soggetto sceglie l'operazione B.

13) Si ha $G_A(0.05) = -1000 + \frac{500}{1.05} + \frac{1500}{1.05^3} = 771.95$ e $G_B(0.05) = -500 + \frac{1000}{1.05} - \frac{1000}{1.05^2} + \frac{1500}{1.05^3} = 841.11$ e poiché $G_B(0.05) > G_A(0.05)$ il soggetto sceglie l'operazione B.

14) Si ha $G_A(0.10) = 100 + \frac{110}{1.1} = 200$ e $G_B(0.10) = \frac{110}{1.1} + \frac{121}{1.1^2} = 200$ e poiché $G_A(0.10) = G_B(0.10)$ il soggetto è indifferente tra le due operazioni.

15) Si ha $G_A(x) = 100 - \frac{60}{1+x} - \frac{72}{(1+x)^2} = 0$ per $x = 0.20$ e $G_B(x) = 200 - \frac{130}{1+x} - \frac{169}{(1+x)^2} = 0$ per $x = 0.30$, quindi $TIR_A < TIR_B$ e poiché si tratta di due operazioni di finanziamento il soggetto sceglie l'operazione A.

16) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $1000 - \frac{1100}{1+x} = 0$, cioè $x = 0.10$, quindi è pari al 10%.

17) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $300 - \frac{360}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = 0$, cioè $x = 0.44$, quindi è pari al 44%.

18) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $500 - \frac{550}{(1+x)^{\frac{4}{3}}} = 0$, cioè $x = 0.074$, quindi è pari al 7.4%.

19) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $-200 + \frac{210}{1+x} = 0$, cioè $x = 0.05$, quindi è pari al 5%.

20) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $-400 + \frac{440}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = 0$, cioè $x = 0.21$, quindi è pari al 21%.

21) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $-1500 + \frac{1600}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = 0$, cioè $x = 0.044$, quindi è pari al 4.4%.

22) Il $TAEG$ è il tasso x che risolve l'equazione $1000 - \frac{1200}{1+x} = 0$, cioè $x = 0.20$, quindi è pari al 20%.

23) Il $TAEG$ è il tasso x che risolve l'equazione $5000-\dfrac{5500}{(1+x)^{\frac{4}{12}}}=0$, cioè $x=0.331$, quindi è pari al 33.1%.

24) Il $TAEG$ è il tasso x che risolve l'equazione $400-\dfrac{529}{(1+x)^2}=0$, cioè $x=0.15$, quindi è pari al 15%.

25) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $1000-\dfrac{600}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{600}{1+x}=0$, cioè $x=0.2791$, mentre il $TAEG$ è il tasso x che risolve l'equazione $900-\dfrac{600}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}-$ $-\dfrac{600}{1+x}=0$, cioè $x=0.4762$. Si ha allora che il TAE è pari al 27.91% e il $TAEG$ è pari al 47.62%.

26) Il TAE è il tasso x che risolve l'equazione $600-\dfrac{350}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{350}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}=0$, cioè $x=0.5135$, mentre il $TAEG$ è il tasso x che risolve l'equazione $600-\dfrac{370}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}-$ $-\dfrac{370}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}=0$, cioè $x=0.7612$. Si ha allora che il TAE è pari al 51.35% e il $TAEG$ è pari al 76.12%.

27) Il TAE è il tasso annuo equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione $18000-\dfrac{1500}{1+x_{12}}-\dfrac{1500}{(1+x_{12})^2}-...-\dfrac{1500}{(1+x_{12})^{12}}=0$, e poiché $x_{12}=0$ si ha $x=(1+0)^{12}-1=0$, mentre il $TAEG$ è il tasso annuo equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione $17900-1500\cdot a_{12\rceil x_{12}}=0$, e poiché $x_{12}=0.000858$ si ha $x=(1+0.000858)^{12}-1=0.0103$. Si ha allora che il TAE è nullo e il $TAEG$ è pari all'1.03%.

28) Il TAE è il tasso annuo equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione $1000-100\cdot a_{12\rceil x_{12}}=0$, e poiché $x_{12}=0.0292$ si ha $x=(1+0.0292)^{12}-1=$ $=0.4125$, mentre il $TAEG$ è il tasso annuo equivalente al tasso mensile x_{12} che risolve l'equazione $920-100\cdot a_{12\rceil x_{12}}=0$, e poiché $x_{12}=0.0434$ si ha $x=(1+0.0434)^{12}-1=$ $=0.6649$. Si ha allora che il TAE è pari al 41.25% e il $TAEG$ è pari al 66.49%.

29) Nel caso di un'operazione finanziaria che comporta oneri accessori si ha sempre $TAEG>TAE$.

30) Nel caso di un'operazione finanziaria che non comporta oneri accessori si ha sempre $TAEG=TAE$.

11.10. Esercizi Capitolo 10

1) Il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	5000
1	2000	750	2750	2000	3000
2	2000	450	2450	4000	1000
3	1000	150	1150	5000	–

2) Si ha $R = 638$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	1000
1	200	100	300	200	800
2	220	80	300	420	580
3	580	58	$R = 638$	1000	–

3) Si ha $1200 = 3C$ da cui $C = 400$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	1200
1	400	120	520	400	800
2	400	80	480	800	400
3	400	40	440	1200	–

4) Si ha $10000 = R \cdot a_{3\rceil 0.15}$ da cui $R = \dfrac{10000}{a_{3\rceil 0.15}} = \dfrac{10000}{\dfrac{1-(1+0.15)^{-3}}{0.15}} = 4379.77$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	10000
1	2879.77	1500	4379.77	2879.77	7120.23
2	3311.74	1068.03	4379.77	6191.51	3808.49
3	3808.49	571.28	4379.77	10000	–

5) Si ha $R = 7359$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	10000
1	1000	1000	2000	1000	9000
2	1100	900	2000	2100	7900
3	1210	790	2000	3310	6690
4	6690	669	$R = 7359$	10000	–

6) Si ha $3000 = 3C$ da cui $C = 1000$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	3000
1	1000	150	1150	1000	2000
2	1000	100	1100	2000	1000
3	1000	50	1050	3000	–

7) Si ha $R = 371.8$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	1000
1	200	100	300	200	800
2	220	80	300	420	580
3	242	58	300	662	338
4	338	33.8	$R = 371.8$	1000	–

8) Si ha $10000 = 4C$ da cui $C = 2500$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	10000
1	2500	1000	3500	2500	7500
2	2500	750	3250	5000	5000
3	2500	500	3000	7500	2500
4	2500	250	2750	10000	–

9) Si ha $R = 550$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	2000
1	1000	200	1200	1000	1000
2	500	100	600	1500	500
3	500	50	$R = 550$	2000	–

10) Si ha $2000 = 4C$ da cui $C = 500$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	2000
1	500	200	700	500	1500
2	500	150	650	1000	1000
3	500	100	600	1500	500
4	500	50	550	2000	–

11) Si ha $12000 = 4C$ da cui $C = 3000$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	12000
1	3000	1200	4200	3000	9000
2	3000	900	3900	6000	6000
3	3000	600	3600	9000	3000
4	3000	300	3300	12000	–

12) Si ha $5000 = R \cdot a_{4\rceil 0.15}$ da cui $R = \dfrac{5000}{a_{4\rceil 0.15}} = \dfrac{5000}{\dfrac{1-(1+0.15)^{-4}}{0.15}} = 1751.33$ e il piano di ammortamento è il seguente:

t	C_t	I_t	R_t	E_t	D_t
0	–	–	–	–	5000
1	1001.33	750	1751.33	1001.33	3998.67
2	1151.53	599.80	1751.33	2152.86	2847.14
3	1324.26	427.07	1751.33	3477.12	1522.88
4	1522.88	228.45	1751.33	5000	–

13) $i_0 = \dfrac{10000 - 9700}{9700 \cdot 1} = 0.0309$ cioè $i_0 = 3.09\%$

14) $i_0 = \dfrac{5000 - 4950}{4950 \cdot \dfrac{3}{12}} = 0.0404$ cioè $i_0 = 4.04\%$

15) $A_0 = \dfrac{3000}{1 + 0.025 \cdot 1} = 2926.83$

16) $A_0 = \dfrac{6000}{1 + 0.04 \cdot \frac{6}{12}} = 5882.35$

17) $A_0 = \dfrac{1000}{1 + 0.02 \cdot 1} = 980.39$ mentre $A_{\frac{6}{12}} = \dfrac{1000}{1 + 0.02 \cdot \dfrac{6}{12}} = 990.10$ e quindi $i_{0,\frac{6}{12}} = \dfrac{990.10 - 980.39}{980.39 \cdot \dfrac{6}{12}} = 0.0198$ cioè $i_{0,\frac{6}{12}} = 1.98\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,\frac{6}{12}} = \dfrac{0.02}{1 + 0.02\left(1 - \dfrac{6}{12}\right)} = 0.0198$).

18) $A_0 = \dfrac{5000}{1 + 0.03 \cdot \dfrac{6}{12}} = 4926.11$ mentre $A_{\frac{4}{12}} = \dfrac{5000}{1 + 0.03 \cdot \dfrac{2}{12}} = 4975.12$ e quindi $i_{0,\frac{4}{12}} = \dfrac{4975.12 - 4926.11}{4926.11 \cdot \dfrac{4}{12}} = 0.0298$ cioè $i_{0,\frac{4}{12}} = 2.98\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,\frac{4}{12}} = \dfrac{0.03}{1 + 0.03\left(\dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12}\right)} = 0.0298$).

19) $A_0 = \dfrac{2000}{1 + 0.035 \cdot 1.5} = 1900.24$ mentre $A_1 = \dfrac{2000}{1 + 0.035 \cdot 0.5} = 1965.60$ e quindi $i_{0,1} = \dfrac{1965.60 - 1900.24}{1900.24 \cdot 1} = 0.0344$ cioè $i_{0,1} = 3.44\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,1} = \dfrac{0.035}{1 + 0.035\,(1.5 - 1)} = 0.0344$).

20) $A_0 = \dfrac{2000}{1 + 0.06 \cdot 1} = 1886.79$ mentre $A_{\frac{8}{12}} = \dfrac{2000}{1 + 0.065 \cdot \dfrac{4}{12}} = 1957.59$ e quindi $i_{0,\frac{8}{12}} = \dfrac{1957.59 - 1886.79}{1886.79 \cdot \dfrac{8}{12}} = 0.0563$ cioè $i_{0,\frac{8}{12}} = 5.63\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,\frac{8}{12}} = \dfrac{0.06 \cdot 1 - 0.065\left(1 - \dfrac{8}{12}\right)}{\dfrac{8}{12}\left[1 + 0.065\left(1 - \dfrac{8}{12}\right)\right]} = 0.0563$).

21) $A_0 = \dfrac{5000}{1 + 0.04 \cdot \dfrac{6}{12}} = 4901.96$ mentre $A_{\frac{4}{12}} = \dfrac{5000}{1 + 0.035 \cdot \dfrac{2}{12}} = 4971$ e quindi

$i_{0,\frac{4}{12}} = \dfrac{4971 - 4901.96}{4901.96 \cdot \dfrac{4}{12}} = 0.0423$ cioè $i_{0,\frac{4}{12}} = 4.23\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,\frac{4}{12}} = \dfrac{0.04 \cdot \dfrac{6}{12} - 0.035\left(\dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12}\right)}{\dfrac{4}{12}\left[1 + 0.035\left(\dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12}\right)\right]} = 0.0423$).

22) $A_0 = \dfrac{10000}{1 + 0.03 \cdot 1.5} = 9569.38$ mentre $A_{\frac{6}{12}} = \dfrac{10000}{1 + 0.0325 \cdot 1} = 9685.23$ e quindi $i_{0,\frac{6}{12}} = \dfrac{9685.23 - 9569.38}{9569.38 \cdot \dfrac{6}{12}} = 0.0242$ cioè $i_{0,\frac{6}{12}} = 2.42\%$ (lo stesso risultato può essere ottenuto dalla formula $i_{0,\frac{6}{12}} = \dfrac{0.03 \cdot 1.5 - 0.0325\left(1.5 - \dfrac{6}{12}\right)}{\dfrac{6}{12}\left[1 + 0.0325\left(1.5 - \dfrac{6}{12}\right)\right]} = 0.0242$).

23) Si ha $i = \dfrac{30}{500} = 0.06$ e $r = \dfrac{30}{450} = 0.067$, cioè il tasso cedolare è pari al 6% e il rendimento immediato è pari al 6.7%.

24) Si ha $i = \dfrac{2 \cdot 2}{100} = 0.04$ e $r = \left(1 + \dfrac{2}{90}\right)^2 - 1 = 0.045$, cioè il tasso cedolare è pari al 4% e il rendimento immediato è pari al 4.5%.

25) Si ha $r = \dfrac{200}{1970} = 0.1015$, cioè il rendimento immediato è pari al 10.15%, mentre il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione $-1970 + \dfrac{200}{1+x} + \dfrac{2210}{(1+x)^2} = 0$ da cui $x = 0.1111$, cioè il rendimento effettivo è pari all'11.11%.

26) Si ha $i = \dfrac{2 \cdot 60}{1000} = 0.12$ e $r = \left(1 + \dfrac{60}{980}\right)^2 - 1 = 0.1262$, cioè il tasso cedolare è pari al 12% e il rendimento immediato è pari al 12.62%, mentre il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione $-980 + \dfrac{60}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{60}{1+x} + \dfrac{60}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{60}{(1+x)^2} + \dfrac{60}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{1065}{(1+x)^3} = 0$ da cui $x = 0.1339$, cioè il rendimento effettivo è pari al 13.39%.

27) Si ha $r = \dfrac{50}{980} = 0.0510$, cioè il rendimento immediato è pari al 5.10%, mentre il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione $-980 - 12.5 + \dfrac{50}{(1+x)^{\frac{9}{12}}} + \dfrac{1060}{(1+x)^{\frac{21}{12}}} = 0$ da cui $x = 0.0679$, cioè il rendimento effettivo è pari al 6.79%.

28) Si ha $i = \dfrac{2 \cdot 100}{2000} = 0.10$ e $r = \left(1 + \dfrac{100}{1900}\right)^2 - 1 = 0.1080$, cioè il tasso cedolare è pari al 10% e il rendimento immediato è pari al 10.80%, mentre il rendimento effettivo è il tasso x che risolve l'equazione $-1900 - 33.34 + \dfrac{100}{(1+x)^{\frac{4}{12}}} + \dfrac{100}{(1+x)^{\frac{10}{12}}} + \dfrac{100}{(1+x)^{\frac{16}{12}}} + \dfrac{2105}{(1+x)^{\frac{22}{12}}} = 0$ da cui $x = 0.1370$, cioè il rendimento effettivo è pari al 13.70%.

29) Il tasso cedolare è $i = \dfrac{c}{N}$ mentre il tasso di rendimento immediato è $r = \dfrac{c}{S}$, e poiché $S < N$ si ha $i < r$. Il tasso di rendimento effettivo, poi, è il valore j tale che $-S + \dfrac{c+N}{1+j} = 0$, da cui $j = \dfrac{c}{S} + \dfrac{N}{S} - 1 > \dfrac{c}{S} = r$ (poiché $\dfrac{N}{S} > 1$), quindi si ha $i < r < j$.

30) Il tasso cedolare è $i = \dfrac{c}{N}$ mentre il tasso di rendimento immediato è $r = \dfrac{c}{S}$, e poiché $S > N$ si ha $i > r$. Il tasso di rendimento effettivo, poi, è il valore j tale che $-S + \dfrac{c+N}{1+j} = 0$, da cui $j = \dfrac{c}{S} + \dfrac{N}{S} - 1 < \dfrac{c}{S} = r$ (poiché $\dfrac{N}{S} < 1$), quindi si ha $i > r > j$.